Examen: Phénoménologie et modélisation des marchés financiers (SE324)

Michael Benzaquen – 25 01 2018

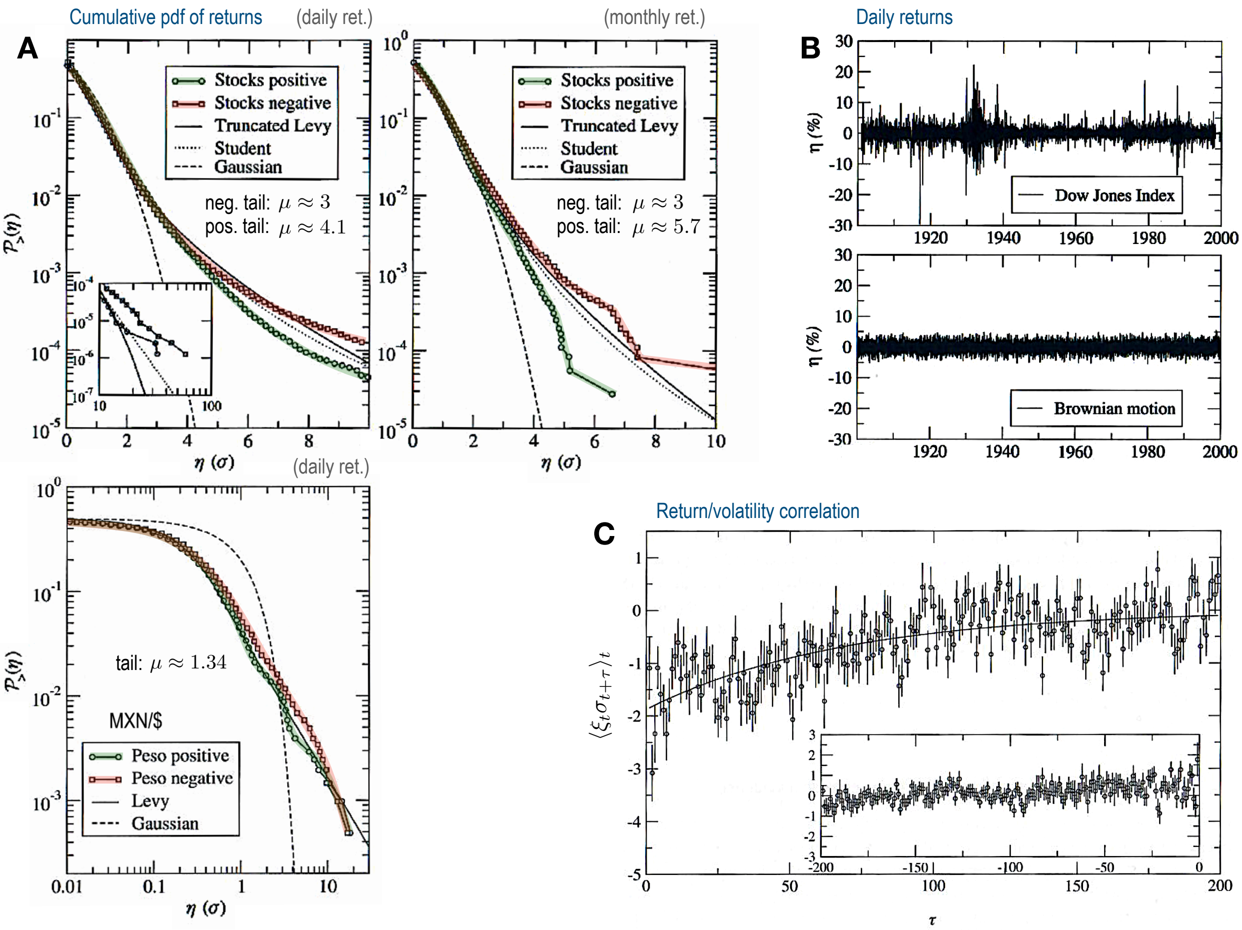
Durée de l'épreuve: 2h

Les calculatrices et notes de cours ne sont pas autorisées.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est donné à titre indicatif.

1 Analyse de données empiriques et questions de cours (8 pts)

1. Décrire et interpréter soigneusement les résultats de chacun des graphes présentés ci-dessous. On pourra en particulier discuter des conséquences de ces observations en termes de modélisation. (3 pts)



2. Qu'appelle-t-on *intermittence* d'une série temporelle ? Que peut-on dire du processus de volatilité dans les marchés financiers ? (1 pt)

3. Comment expliquer que les returns soient en moyenne plus forts à la baisse qu'à la hausse ? Qu'est-ce que l'effet de levier ? (1 pt)

4. Les mouvements de prix dans les marchés financiers sont-ils de nature essentiellement endogène ou exogène ? Qu'est-ce que la loi de Omori (ou *Omori law*) ? (1 pt)

5. Qu'appelle-t-on *puzzle de la diffusivité* (ou *diffusivity puzzle*) ? En quoi les modèles à propagateur permettent de résoudre cette inconsistence apparente ? (1 pt)

6. Qu'est-ce qu'un *métaordre* ? Qu'appelle-t-on *impact en racine* des métaordres ? Discuter des implications théoriques (en termes de modélisation) et pratiques (en termes de coûts) de l'impact en racine des métaordres. (1 pt)

2 Décisions et pression sociale (12 pts)

Dans le cadre du *Random Field Ising Model*, chaque agent $i \in [\![1,N]\!]$ est confronté à un choix binaire $s_i \in \{-1,1\}$ ($e.g.$ acheter ou ne pas acheter). La tendance u_i de l'agent i à choisir $+1$ plutôt que -1 est donnée par:

$$u_i(t) = h(t) + \sum_{j=1}^{N} J_{ij} s_j(t-1) \,. \tag{1}$$

1. Donner une interprétation des différents termes figurant dans l'équation ci-dessus. (1 pt)

On choisit la règle de décision ci-dessous:

$$P(s_i = +1|u_i) = \frac{1}{1+e^{-\beta u_i}} \quad \text{avec} \quad \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad P(s_i = -1|u_i) = 1 - P(s_i = +1|u_i) \,. \tag{2}$$

2. Quel est le rôle de β? Discuter en particulier des cas $\beta = 0$ et $\beta \to \infty$. (1 pt)

On note $\phi = N_+/N$ la fraction d'agents ayant fait le choix $+1$ à l'instant t. On définit la tendance moyenne $u = \frac{1}{N}\sum_i u_i$, ainsi que le choix moyen $m = \frac{1}{N}\sum_i s_i$.

On se place dans le cas champ moyen $J_{ij} := J/N \ \forall i,j$.

3. Montrer que l'on a $m(t) = 2\phi(t) - 1$, et $u(t) = h(t) + J\big[2\phi(t-1) - 1\big]$. (1 pt)

4. Montrer que l'évolution de N_+ entre deux instants successifs t et $t+1$ est régie par les probabilités de transition suivantes (on pose $z = e^{\beta u}$): (1 pt)

$$P(N_+ \to N_+ + 1) = \frac{z}{1+z}(1-\phi) \tag{3a}$$

$$P(N_+ \to N_+ - 1) = \frac{1}{1+z}\phi \,. \tag{3b}$$

5. En déduire que (1 pt):

$$\langle N_+ \rangle_{t+1} - \langle N_+ \rangle_t = \frac{z}{1+z} - \phi \tag{4}$$

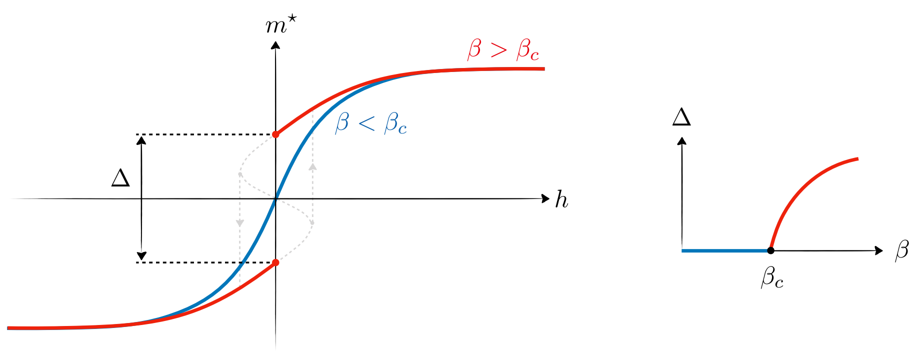
6. L'équilibre est donné par $\langle \mathrm{d}N_+ \rangle = 0$. En déduire la valeur d'équilbre $\phi^\star$ et montrer que l'on obtient une equation auto-consistante sur $m^\star$ de la forme:[1] (2 pts)

$$m^\star = \tanh\left[\frac{\beta}{2}(Jm^\star + h)\right] \tag{5}$$

On se place tout d'abord dans le cas $h = 0$.

7. Montrer graphiquement qu'il existe une valeur critique $\beta_c(J)$ telle que pour $\beta \geq \beta_c$ l'équation ci-dessus admet deux solutions $m^\star_\pm$ non triviales opposées (on définit $\Delta = |m^\star_+ - m^\star_-|$). Qu'en est-il pour $\beta < \beta_c$? (2 pts)

Dans le cas général, l'équation (5) peut être résolue numériquement afin d'obtenir $m^\star(h)$ (voir figure ci-dessous).



8. Donner une interprétation physique des résultats présentés dans la figure ci-dessus. On pourra envisager une situation où $h(t)$ décroit continument au cours du temps d'une valeur positive à une valeur négative. (2 pts)

On peut montrer qu'au voisinage de β_c les changements d'avis s'organisent en avalanches de différentes tailles n (cela veut dire que n personnes partageant la même position changent d'avis quasi-simultanément). La taille de ces avalanches est distribuée selon une loi de la forme $P(n) \sim n^{-3/2}e^{-\epsilon n}$ pour n grand, où $\epsilon \to 0$ au point critique.

9. Quelle propriété particulière acquiert le système lorsque $\epsilon \to 0$? Confronter ce résultat à la distribution empirique des returns dans les marchés financiers (voir Fig. A de l'exercice 1). (1 pt)

[1] On rappelle que $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$.