Mathématiques - Travaux Dirigés de Soutien

TD 1 : Fonctions d'une variable complexe

Soit f une fonction d'une variable complexe $z = x+iy$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, où u et v sont des fonctions réelles de deux variables.

I Continuité et dérivabilité

1. Rappeler les définitions de *limite* et *continuité*.

2. Montrer que les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto z^2$ sont continues sur $\mathbb{C}$.

3. Etudier la continuité de la fonction $z \mapsto \dfrac{z}{\bar{z}}$ en zero.

4. Rappeler les définitions de *dérivablité, holomorphie* et *fonction entière*.

5. Montrer que les fonctions $z \mapsto z$, $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \exp z$ et $z \mapsto \cos z$ sont entières.

6. Etudier la dérivabilité des fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \Re(z)$ et $z \mapsto y + 2ix$.

II Théorème de Cauchy-Riemann

7. Rappeler le théorème de Cauchy-Riemann.

8. Que faut-il pour qu'une fonction vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann soit holomorphe ?

9. Reprendre les questions **5.** et **6.** en utilisant le théorème de Cauchy-Riemann et la question **8.**

10. Etudier la dérivabilité de la fonction $z \mapsto |x| - i|y|$.

11. Montrer que si f est holomorphe alors $(\boldsymbol{\nabla} u)^2 = (\boldsymbol{\nabla} v)^2$.

12. Montrer que si f est holomorphe alors u et v sont harmoniques[1].

13. Démontrer le théorème de Cauchy-Riemann.

[1] Une fonction harmonique est une fonction deux fois continûment dérivable qui satisfait à l'équation de Laplace.