Mathématiques - Travaux Dirigés de Soutien

TD 2 : Intégration dans le plan complexe

Soit f une fonction d'une variable complexe $z = x+iy$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, où u et v sont des fonctions réelles de deux variables.

I Chemins, contours et intégration

1. Rappeler les définitions de *chemin* et *contour*.

2. Rappeler les définitions de *contours homotopes* et *domaine simplement connexe*.

3. Evaluer l'intégrale de $z \mapsto z$ sur le chemin $\gamma : t \in [0,2] \mapsto t^2 + it$.

4. Evaluer l'intégrale de $z \mapsto z$, $z \mapsto 1/z$ et $z \mapsto \Re(z)$ sur le cercle centré en l'origine et de rayon r, puis sur le demi cercle supérieur (toujours centré en l'origine et de rayon r).

5. Même question sur le chemin ABC : A $= (a,0)$, B $= (0,a)$ et C $= (-a,0)$ avec $a > 0$.

II Théorème de Cauchy

6. Démontrer le théorème de Cauchy à partir du théorème de Stokes.

7. Discuter des réponses aux questions **4.** et **5.** à la lumière du théorème de Cauchy.

8. Evaluer l'intégrale de $z \mapsto (z+2)e^{iz}$ sur le chemin défini par l'arc de parabole $\pi^2 y = x^2$ d'extrémités $(0,0)$ et $(\pi,1)$.

9. Soit γ un contour simple et $z = \omega$ un point du plan complexe. Evaluer l'intégrale de $z \mapsto 1/(z-\omega)^n$ sur γ en fonction des valeurs de n, suivant que ω est à l'extérieur ou à l'intérieur de γ.

III Formule de Cauchy

10. Soit f analytique sur un domaine Ω simplement connexe de $\mathbb{C}$. Démontrer par récurrence que pour tout contour γ de Ω entourant z on a:

$$f^{(n)}(z) \quad = \quad \frac{n!}{2i\pi} \oint_\gamma \mathrm{d}z' \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}} \tag{1}$$

11. Démontrer que tout polynôme $P_n(z)$ de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$. On pourra appliquer le théorème de Liouville à la fonction $z \mapsto 1/P_n(z)$.