Mathématiques - Travaux Dirigés de Soutien

TD 3 : Calcul des résidus et intégration

On admettra tout au long du sujet la convergence des intégrales proposées.

I Séries de Laurent et résidus

1. Déterminer les singularités puis les résidus respectifs des fonctions $z \mapsto z$, $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z^2}$ et $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z^2}$.

2. De même pour les fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z(z-2)^3}$, $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ et $z \mapsto \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$.

II Calcul d'intégrales réelles

3. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax)\,\mathrm{d}x$. On pourra à cet effet chercher à évaluer l'intégrale de la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le contour rectangle $[-R, R, R+ia/2, -R+ia/2]$.

4. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\sin 2x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

5. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ avec $b > a > 0$.

6. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^4}\,\mathrm{d}x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

7. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.

8. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

9. Evaluer les intégrales de Fresnel $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x$ et $\mathcal{J} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

III Fonctions multivaluées

10. Montrer que les fonctions $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto \log z$ sont multivaluées.

11. En précisant le choix de la coupure, évaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+a)^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ avec $a > 0$.

12. En précisant le choix de la coupure, évaluer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.