Mathématiques - Travaux Dirigés de Soutien

TD 4 : Transformation de Fourier

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et a un réel positif non nul. On choisit les conventions de Fourier suivantes:

$$\mathcal{F}(f): \ k \ \mapsto \ \hat{f}(k) \ = \ \int \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-ikx} \tag{1}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}): \ x \ \mapsto \ f(x) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} \ , \tag{2}$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse.

I Propriétés de la transformation de Fourier

1. Relier les transformées de Fourier de $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto f(a+x)$ à la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x)$.

2. Pour f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, relier les transformées de Fourier de $x \mapsto f'(x)$ et $x \mapsto xf(x)$ à la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x)$.

3. Après avoir montrer la commutativité du produit de convolution, relier la transformée de Fourier de $x \mapsto (f * g)(x)$ à la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x)$.

4. Montrer que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) = \mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ désigne la fonction identité.

5. Résoudre l'équation intégrale sur f: $f(x) = \displaystyle\int \mathrm{d}x'\, f(x')g(x-x') + h(x)$, où g et $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

6. Relier entre eux les points suivants:

f réelle et paire	•	•	$\hat{f}$ imaginaire pure et impaire
f réelle	•	•	$\hat{f}$ paire (à symétrie hermitienne)
f réelle et impaire	•	•	$\hat{f}$ imaginaire pure et paire
f imaginaire pure et paire	•	•	$\hat{f}$ réelle et impaire
f imaginaire pure et impaire	•	•	$\hat{f}$ réelle et paire

II Transformées de Fourier classiques et applications

7. Chercher les transformées de Fourier des fonctions $x \mapsto e^{-ax^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

8. Chercher les transformées de Fourier des fonctions $x \mapsto \Theta\left(x + \frac{a}{2}\right)\Theta\left(\frac{a}{2} - x\right)$ et $x \mapsto \Theta(x)e^{-ax}$, où Θ désigne la fonction d'Heaviside.

9. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ avec les conditions aux limites $u(x, t=0) = u_0(x)$ et $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$, où $u_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.