
Mathématiques - Travaux Dirigés de Soutien

TD 5 : Distributions

Soient T_f et T_g deux distributions régulières associées aux fonction localement sommables et continument dérivables f et g . Soit λ un scalaire.

I Définition et propriétés

1. Qu'est ce qu'une *distribution* ? Préciser ce que veut dire continuité d'une fonctionnelle.
2. Qu'est ce qu'une *distribution régulière* ?
3. Qu'est ce qu'une *distribution singulière* ? En donner des exemples.
4. Calculer $T_f + \lambda T_g$.
5. Exprimer la translatée de vecteur a de T_f , puis la dilatée de facteur a de T_f .
6. Exprimer la dérivée de T_f .

II Distribution de Dirac

7. Qu'est ce la distribution de Dirac ?
8. Montrer que δ est bien une distribution.
9. Répondre aux questions **5.** et **6.** en remplaçant T_f par δ .
10. Exprimer $\delta(f(x))$.
11. Calculer la dérivée de la distribution de Heaviside $\Theta(x)$.
12. Calculer la transformée de Fourier de la distribution de Dirac.
13. Exprimer le produit de convolution d'une distribution T avec la distribution de Dirac.
14. Montrer que $x\delta' = -\delta$, puis calculer $x\delta''$ et $f(x)\delta'$ où f est \mathcal{C}^∞ .

III Valeur principale et formule de Sokhotsky-Plemelj

15. Rappeler ce qu'est la valeur principale de Cauchy d'une intégrale impropre, ainsi que la distribution associée notée $\text{Pf } 1/(x - x_0)$.
16. Montrer que la valeur principale de Cauchy est la dérivée, au sens des distributions, de la distribution régulière associée la fonction localement sommable $x \mapsto \log x$.
17. Démontrer la formule de Sokhotsky-Plemelj pour une fonction d'essai ϕ méromorphe sans pôles sur l'axe réel.