Tutorat de Mathématiques

Tutorat 2: Electromagnétisme dans les milieux

On s'intéresse aux implications de la dépendance en fréquence de la permittivité diélectrique. On considère un milieu *non magnétique, linéaire, homogène et isotrope.*

I Non localité temporelle et causalité

1. Rappeler les définitions de: non magnétique, linéaire, homogène et isotrope.

On rappelle la relation entre les composantes monochromatiques du vecteur déplacement $\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},\omega)$, du champ électrique $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)$ et de la permittivité $\varepsilon(\omega)$:

$$\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},\omega) \quad = \quad \varepsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) \ . \tag{1}$$

2. Déterminer la relation intégrale qui existe entre les composante temporelles $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ et $\varepsilon(\omega)$[1].

3. Démontrer que l'on peut écrire:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \quad = \quad \varepsilon_0 \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau\, G(\tau)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t-\tau)\right] \tag{2}$$

$$\text{avec} \quad G(\tau) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega\, \big[\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0 - 1\big] e^{-i\omega\tau} \ . \tag{3}$$

Commenter.

4. Que devient cette expression dans le cas particulier où la permittivité est indépendante de la fréquence ?

5. Rappeler la relation qui existe entre la permittivité $\varepsilon(\omega)$ et la susceptibilité $\chi(\omega)$.

Afin de mieux comprendre les implications de l'équation (2), on se donne un modèle à une résonance pour la susceptibilité:

$$\chi(\omega) \quad = \quad \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \ . \tag{4}$$

6. Donner une interprétation physique de ce modèle.

7. Donner l'expression intégrale de $G(\tau)$ pour le modèle (4), puis la calculer à l'aide du théorème des résidus. On introduira la fonction d'Heaviside $\Theta(\tau)$ et on prendra $\gamma < 2\omega_0$.

8. Commenter le résultat obtenu. Discuter notamment de la causalité et du temps caractéristique de non localité temporelle. On a typiquement $\gamma \sim 10\,\mathrm{MHz}$ à $1\,\mathrm{GHz}$.

II Domaine d'analyticité de la permittivité

On abandonne maintenant le cas particulier du modèle (4) pour nous concentrer à nouveau sur les relations générales du début du problème.

9. Démontrer que pour z complexe, on a la relation: $\varepsilon(-z) = \varepsilon^*(z^*)$ où " $*$ " désigne le complexe conjugué.

10. Sur quel domaine de $\mathbb{C}$ la fonction $\varepsilon(z)$ est t'elle analytique ? Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?

11. En cherchant un développement en série de $\varepsilon(\omega)$, montrer que si $G(\tau)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à droite en zéro, alors les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité se comportent aux grands ω comme:

$$\Re\big\{\chi(\omega)\big\} \quad = \quad O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{5}$$

$$\Im\big\{\chi(\omega)\big\} \quad = \quad O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \ . \tag{6}$$

[1] On choisit les conventions de Fourier comme: $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}t\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t)\, e^{i\omega t}$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}\omega\, \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\omega},t)\, e^{-i\omega t}$.

III Valeur principale de Cauchy

Dans cette partie, on donne une définition et un théorème indispensables pour la suite du problème.

Définition Soit f une fonction d'une variable réelle sur l'intervalle $[a, b]$ présentant une singularité au point $x_0 \in]a, b[$. On appelle *valeur principale de Cauchy* $\mathcal{P}$, si elle existe, la quantité:

$$\mathcal{P}\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \quad = \quad \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\, f(x) + \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\, f(x)\right) . \tag{7}$$

Théorème de Sokhotski–Plemelj Dans les mêmes conditions que la définition précédente, on a la relation:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} \quad = \quad \mathcal{P}\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x - x_0} \mp i\pi f(x_0) . \tag{8}$$

Ce théorème sera démontré dans le cours et utilisé à nouveau dans le tutorat 3 à venir. La démonstration ne peut être faite à ce stade car elle fait intervenir les distributions.

IV Relations de Kramers-Kronig

12. Par application du théorème de Cauchy sur un contour bien choisit montrer que l'on a pour tout z appartenant au demi-plan supérieur:

$$\chi(z) \quad = \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega'\, \frac{\chi(\omega')}{\omega' - z} . \tag{9}$$

13. Montrer que lorsque la fréquence complexe z approche l'axe réel par dessus ($z = \omega + i\epsilon$ avec $\epsilon \to 0$), on obtient les relations de *Kramers-Kronig*:

$$\Re\{\chi(\omega)\} \quad = \quad \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega'\, \frac{\Im\{\chi(\omega')\}}{\omega' - \omega} \tag{10}$$

$$\Im\{\chi(\omega)\} \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega'\, \frac{\Re\{\chi(\omega')\}}{\omega' - \omega} . \tag{11}$$

14. En vous référant aux propriétés de parité des parties réelle et imaginaire de la susceptibilité, montrer que l'on a également:

$$\Re\{\chi(\omega)\} \quad = \quad \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \frac{\omega'\Im\{\chi(\omega')\}}{\omega'^2 - \omega^2} \tag{12}$$

$$\Im\{\chi(\omega)\} \quad = \quad -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \frac{\Re\{\chi(\omega')\}}{\omega'^2 - \omega^2} . \tag{13}$$

15. Déduire des équations (12) et (13) les relations de Kramers-Kronig sur la permittivité $\varepsilon(\omega)$.

V Applications

Les relations de Kramers-Kronig reliant la dispersion et l'absorption sont extrêmement utiles. Leur large applicabilité tient au nombre très restreint d'hypothèses physiques nécessaires à leur déduction.

16. Montrer en reprenant le modèle (3) que la *fréquence plasma* peut-être définie par:

$$\omega_p^2 \quad = \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega^2\left[1 - \varepsilon(\omega)/\varepsilon_0\right] . \tag{14}$$

17. Déduire des relations de Kramers-Kronig et de (14) la règle de somme:

$$\omega_p^2 \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \omega\, \Im\{\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0\} \tag{15}$$

18. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, représenter les parties réelle et imaginaire de la permittivité du modèle (3) en fonction de la fréquence. Commenter.

19. Définir l'indice de réfraction d'un milieu $n(\omega)$ ainsi que le coefficient d'absorption $\alpha(\omega)$ en fonction de la permittivité. Commenter la figure 1.

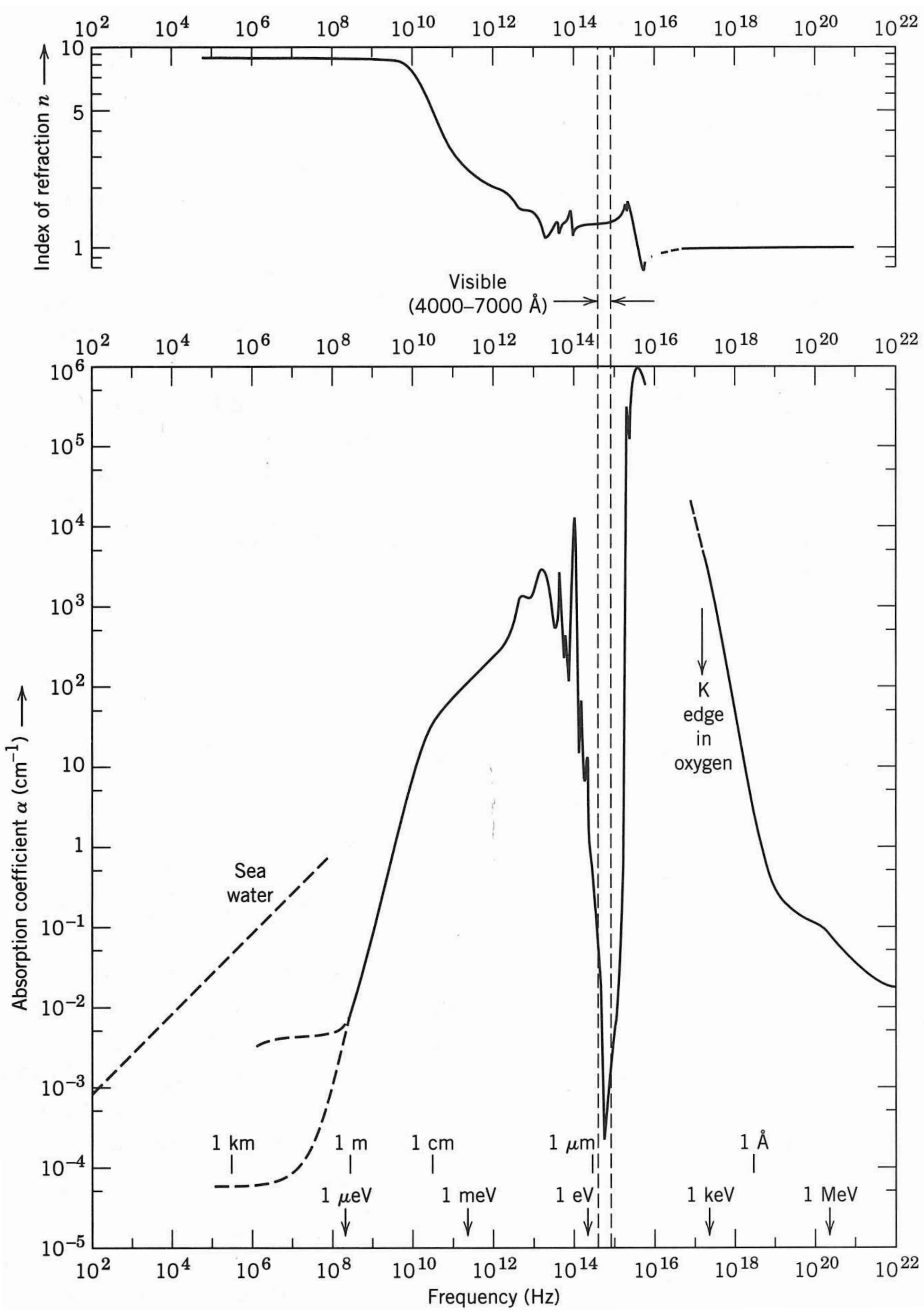

Figure 1: Indice de réfraction (en haut) et coefficient d'absorption (en bas) de l'eau liquide en fonction de la fréquence. Les échelles sont logarithmiques.