Tutorat de Mathématiques

Tutorat 2: Calcul des variations

Partie A - Surfaces minimales

On s'intéresse à la forme du ménisque autour d'une fibre cylindrique plongée dans un liquide. On note r_0 le rayon de la fibre, γ la tension de surface, ρ la densité du liquide et g le champ de pesanteur.

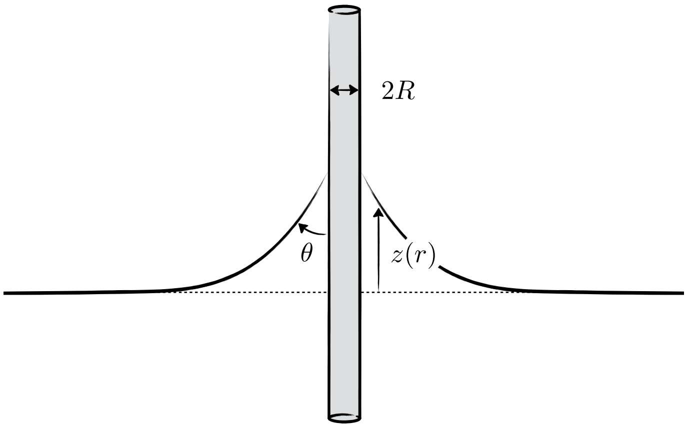


Figure 1: Schéma.

I Recherche bibliographique

1. Effectuer une recherche bibliographique sur les fonctions de Bessel. Cela veut dire les présenter et en donner les principales caractéristiques. Ces fonctions sont souvent d'une grande utilité en physique et il convient d'avoir quelques connaissances de base à ce sujet.

II Le ménisque 2D

On s'intéresse dans un premier temps au cas 2D du ménisque que fait un liquide avec un plan vertical. Le système de coordonnées est cartésien et l'on a: $r = x$.

2. Montrer proprement que l'énergie totale $\mathcal{E}$ du système peux s'écrire sous la forme:

$$\mathcal{E}[z(x)] \quad = \quad \int \mathrm{d}x \, \mathcal{L}(z, \dot{z}, x) \ , \tag{1}$$

où le Lagrangien $\mathcal{L}$ s'écrit:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, x) \quad = \quad \frac{1}{2} \rho g z^2 + \gamma \left(\sqrt{1 + \dot{z}^2} - 1 \right) \ . \tag{2}$$

3. En minimisant l'énergie, montrer que l'on a l'équation de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \ , \tag{3}$$

puis en déduire une équation différentielle ordinaire non linéaire faisant intervenir z, $\dot{z}$ et $\ddot{z}$ ainsi que la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$.

L'équation ainsi obtenue admet des solutions analytiques bien connues.

III Le ménisque 3D

Nous allons nous intéresser dans la suite au cas 3D décrit au début du problème et dans la figure 1.

4. Montrer que l'équation différentielle obtenue à la question **3.** devient:

$$\frac{\ddot{z}}{(1 + \dot{z}^2)^{3/2}} + \frac{\dot{z}}{r(1 + \dot{z}^2)^{1/2}} \quad = \quad \kappa^2 z \ . \tag{4}$$

5. Montrer que les conditions aux limites s'écrivent:

$$z(r \to \infty) = 0 \quad (5)$$
$$\dot{z}(r_0) = -\operatorname{cotan}\theta \; . \quad (6)$$

où θ désigne l'angle d'Young.

A ce jour, on ne connaît pas de solutions analytiques de l'équation (4) avec les conditions aux limites (5) et (6). Nous allons chercher des solutions approchées en utilisant la technique du *raccordement asymptotique*.

6. Adimensioner le problème par le rayon de la fibre r_0. On introduira le nombre de Bond $\mathcal{B} = \kappa r_0$.

7. Montrer que loin de la fibre l'équation obtenue à la question précédente devient:

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{r} - \mathcal{B}^2 z = 0 \; . \quad (7)$$

8. Chercher les solutions de l'équation (7) avec la condition (5) en utilisant les connaissances que vous avez acquises en partie **I** sur les fonctions de Bessel. On pourra également avoir recours à l'aide d'un logiciel de calcul formel. On notera $z_{\text{far}}(r)$ cette solution et $\mathcal{C}_1$ sa constante multiplicative, encore indéterminée à ce stade.

9. Montrer que dans la limite des petits nombres de Bond $\mathcal{B} \ll 1$ et au voisinage de la fibre, l'équation obtenue en question **6.** devient:

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{r}\left(1 + \dot{z}^2\right) = 0 \; . \quad (8)$$

10. Vérifier que l'équation (8) avec la condition (6) admet des solutions de type cathénoïde:

$$z_{\text{close}}(r) = \mathcal{C}_2 - \cos\theta \log\left[r + (r^2 - \cos^2\theta)^{1/2}\right] \; . \quad (9)$$

11. Chercher les développements limités de $z_{\text{far}}(r)$ pour r petit et de $z_{\text{close}}(r)$ pour r grand, puis égaliser les expressions obtenues pour déterminer les constantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Donner l'expression de la hauteur h du ménisque.

12. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, représenter les solutions asymptotiques puis résoudre numériquement l'équation obtenue à la question **6.** afin d'estimer la qualité de la solution approchée.

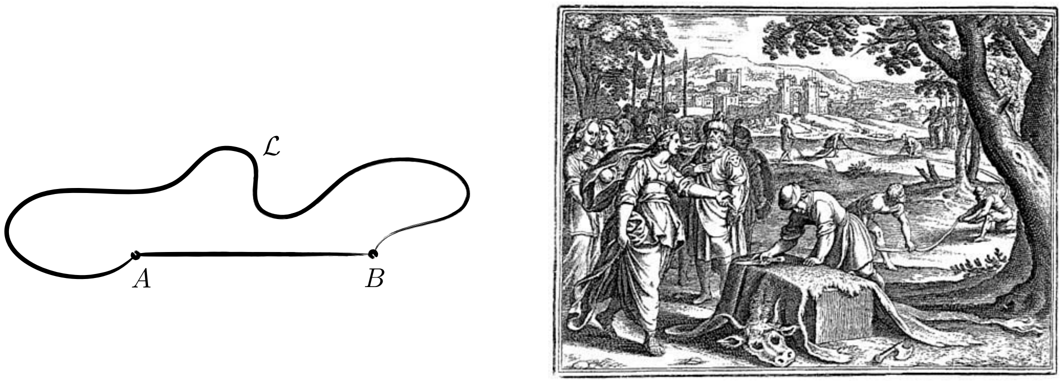
VI Le film de savon

13. Discuter de la figure 2 ci-dessous.

Figure 2: Photo d'un film de savon.

Partie B - Problème de Didon

La ville de Carthage fut fondée en 814 av. J.-C. par la princesse phénicienne Elissa, surnommée Didon. Elle demanda au roi de Numidie Iarbas l'octroi d'un terrain pour s'y installer. Iarbas, réticent, lui accorda le droit de choisir un lopin de terre que pourrait contenir la peau d'un bœuf. La rusée Didon découpa en une fine lamelle la peau, qui devint une longue lanière de 4 km de long. Elle fit étendre cette lanière sur un demi-cercle dont les deux extrémités touchaient la côte, rectiligne à l'endroit où elle se trouvait. La reine avait intuitivement trouvé la solution au problème *isopérimétrique* dans un demi-plan euclidien.



(a) (b)

Figure 3: (a) Schéma. (b) Gravure de Matthäus Merian.

14. Rappeler la méthode de minimisation sous contrainte (multiplicateur de Lagrange).

15. Déterminer, parmi toutes les courbes du plan de longueur $\mathcal{L}$, celle qui délimite avec un segment AB l'aire maximale.