

VIBRATIONS COUPLEES
AVEC LE VENT

Pascal Hémon

Laboratoire d'Hydrodynamique, LadHyX

Ecole Polytechnique, Palaiseau

Octobre 2004

*Si vous pensez que j'ai révélé des secrets, je m'en excuse.
Si vous pensez que tout cela n'est qu'un tissu d'absurdité,
Prenez-y plaisir...*

Drugpa Künleg (1455-1570)

Pascal Hémon
LadHyX, Département de Mécanique
Ecole Polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Mél : pascal.hemon@ladhyx.polytechnique.fr

Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'introduire les phénomènes mécaniques produisant les vibrations de structures sous l'action du vent. Le point de vue adopté est phénoménologique et restreint l'exposé à des structures bidimensionnelles telles que le profil d'aile, le tablier de pont ou un hauban. Il s'adresse à un public d'ingénieurs ou d'élèves ingénieur possédant une culture de base en mécanique et souhaitant appréhender ces problèmes du point de vue physique.

Le premier chapitre expose quelques notions d'aérodynamique de base et pose les définitions qui sont utilisées ensuite. Ce chapitre constitue principalement une description qualitative des écoulements et de leurs effets.

Le chapitre 2 est le cœur de ce cours. Il introduit les différents mécanismes générateurs de vibration, notamment par la notion de dérivées de flottement. L'hypothèse quasi-statique employée permet d'étudier les différents types d'excitation sans mettre en œuvre des calculs complexes.

Dans le chapitre 3 on s'affranchit de l'hypothèse quasi-statique pour généraliser le domaine d'application. Les résultats classiques de la théorie de l'aéroélasticité sont présentés et discutés sur le profil d'aile, puis sur une structure de type tablier.

Enfin le chapitre 4 présente succinctement quelques phénomènes spécifiques rencontrés essentiellement sur les câbles de hauban.

Ce document s'est enrichi des remarques d'Emmanuel de Langre, Cécile Lemaitre et Charlotte Py du LadHyX que je remercie pour le temps qu'ils y ont consacré.

Sommaire

1. Notions d'aérodynamique	7
<i>1.1. Rappels de mécanique des fluides</i>	<i>7</i>
1.1.1. Equations de Navier-Stokes	7
1.1.2. Equations d'Euler	8
1.1.3. Equation de Bernoulli	8
1.1.4. Paramètres adimensionnels	9
1.1.5. Classification des écoulements	11
<i>1.2. Les charges aérodynamiques</i>	<i>12</i>
1.2.1. Définition des actions de pression et coefficient de pression	12
1.2.2. Définition des efforts et des moments aérodynamiques	13
1.2.3. Le centre de poussée	15
1.2.4. Le foyer aérodynamique	15
1.2.5. Influence du nombre de Reynolds et de la turbulence	16
<i>1.3. Le détachement tourbillonnaire</i>	<i>18</i>
1.3.1. Description générale	18
1.3.2. Le nombre de Strouhal	18
1.3.3. Influence de l'écoulement amont	19
<i>1.4. Le vent turbulent</i>	<i>20</i>
1.4.1. Spectres de turbulence	21
1.4.2. Fonctions de cohérence et de corrélation	22
2. Phénomènes aéroélastiques	23
2.1. Introduction	23
2.2. La fréquence réduite	24
2.3. Le flottement classique	25
2.3.1. Mise en équation	25
2.3.2. Stabilité et vitesse critique	27
2.3.3. Cas de l'aile d'avion	28

2.3.4. Cas d'un tablier profilé	29
2.4. Les flottements à un degré de liberté	30
2.4.1. La divergence en torsion	30
2.4.2. Le galop	31
2.4.3. Le flottement de décrochage en torsion	33
2.5. Excitation par la turbulence	35
2.6. Excitation par détachement tourbillonnaire.....	36
2.6.1. Approche linéaire.....	36
2.6.2. Limite de l'approche linéaire	37
3. Aéroélasticité.....	41
3.1. Limite de l'hypothèse quasi-statique	41
3.2. Cas du profil d'aile mince.....	42
3.2.1. Couplage flexion-torsion.....	42
3.2.2. Comparaison avec la théorie quasi-statique	45
3.2.3. Le décrochage dynamique.....	47
3.2.4. Effet de la turbulence	48
3.3. Cas des corps non profilés.....	49
3.3.1. Les dérivées de flottement	49
3.3.2. Problème de l'amortissement en torsion	50
3.3.3. Admittances	51
4. Phénomènes particuliers.....	55
4.1. La crise de traînée	55
4.2. Le galop de sillage.....	56
4.3. L'excitation conjointe vent-pluie	57
Bibliographie.....	59
Annexe 1 : Rappel sur l'oscillateur à un degré de liberté	60
Annexe 2 : Nombres de Strouhal de sections usuelles	61
Annexe 3 : Dérivées des efforts de quelques sections usuelles	62

1. Notions d'aérodynamique

Ce chapitre ne constitue pas une présentation générale de l'aérodynamique. Il s'attache seulement à en présenter les principaux concepts qui interviennent dans l'étude du comportement des structures soumises aux actions du vent.

1.1. Rappels de mécanique des fluides

1.1.1. Equations de Navier-Stokes

La mécanique des fluides est régie au plan macroscopique par les équations de Navier-Stokes issues des principes de conservation habituels de la mécanique : conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Dans le contexte aérodynamique et du vent à basse altitude, ces équations se simplifient :

- les vitesses rencontrées sont largement inférieures à la vitesse du son et la masse volumique de l'air est supposée constante. C'est l'hypothèse d'incompressibilité ;
- la température de l'air est constante ;
- l'air est un gaz léger dont la poids propre est négligé devant les autres forces.

Ces équations sont complétées par une loi d'état et de comportement du fluide. L'air est normalement considéré comme un gaz parfait et un fluide newtonien. Cette loi de comportement suppose une relation linéaire entre les contraintes de cisaillement et le gradient de vitesse, via la viscosité μ qui traduit les effets de frottement interne au fluide. Toutes ces hypothèses permettent d'obtenir les équations de l'aérodynamique basse vitesse. Les équations de Navier-Stokes sont réduites alors à l'équation de continuité et de la quantité de mouvement.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (1.1)$$

où \mathbf{u} est la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique, f l'accélération due aux forces de volume et de surface et t le temps. Ce système doit être naturellement muni de conditions aux limites, notamment sur les parois solides, et initiales.

Dans l'équation de la quantité de mouvement, le premier membre constitue la dérivée particulière de la vitesse représentant l'accélération d'une particule de fluide qui se déplace. Le second membre traduit l'effet des contraintes internes et se décompose en un terme de pression hydrostatique, un terme de viscosité dû au frottement interne et un terme d'accélération dû aux forces de volume et de surface. Le terme visqueux constitue un élément important de l'aérodynamique car on ne peut pas le négliger dans un écoulement à proximité d'une paroi solide à cause de la couche limite qui s'y développe.

Ce système non linéaire reste très difficile à résoudre numériquement pour les écoulements complexes rencontrés dans la pratique.

1.1.2. Equations d'Euler

Les équations d'Euler sont une simplification des équations de Navier-Stokes pour lesquelles on a négligé le terme dû à la viscosité. Elles sont utilisées en pratique pour calculer les écoulements loin de parois solides et assez souvent dans le domaine aéronautique pour les écoulements compressibles à grande vitesse. Elles sont généralement munies de modèles empiriques de parois afin de rendre compte de l'effet de couche limite.

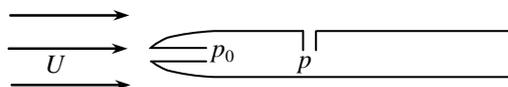


Figure 1.1. Définition des pressions totale p_0 et statique p sur un tube de Prandtl.

1.1.3. Equation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est très utile en aérodynamique et peut s'obtenir à partir des équations d'Euler prises sous forme intégrale. Naturellement elle contient les hypothèses des équations d'Euler auxquelles s'ajoute celle d'un écoulement irrotationnel, c'est-à-dire $\nabla \times \mathbf{u} = 0$.

Son usage est très courant dans le cas d'un écoulement stationnaire incompressible. Elle permet le long d'une ligne de courant de relier directement la pression statique p et la pression totale p_0 par :

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + p = p_0 \tag{1.2}$$

Cette relation est largement utilisée en soufflerie pour calculer la vitesse moyenne à partir de la mesure des pressions statique et totale à l'aide d'un tube de Prandtl (souvent appelé à tort un tube de Pitot double, cf. *figure 1.1*). La pression statique est la pression mesurée par un orifice placé perpendiculairement à l'écoulement moyen, tandis que la pression totale est mesurée dans l'axe de la

vitesse moyenne. A noter que la pression totale est justement appelée parfois la pression d'arrêt du fait qu'il s'agit d'une pression obtenue à vitesse nulle dans l'axe de l'écoulement. On définit par ailleurs la pression dynamique $q = \rho |\mathbf{u}|^2 / 2$.

1.1.4. Paramètres adimensionnels

Nous avons mentionné la difficulté à résoudre les équations de Navier-Stokes pour l'aérodynamique. Aussi les essais en soufflerie représentent un moyen d'obtenir des informations fiables sur les écoulements et leurs effets sur les structures. Or il convient de respecter des règles de similitudes afin que le problème simulé en soufflerie sur maquette à échelle réduite, soit bien représentatif du cas réel. La transformation de l'équation de la quantité de mouvement en une équation liant des grandeurs sans dimension permet de mettre en évidence une partie des paramètres adimensionnels. On définit donc une liste de grandeurs physiques de référence, par exemple la largeur B du tablier d'un pont en tant que longueur de référence. Soit $\tilde{x} = x/B$, $\tilde{f} = f/g$, où g est l'accélération de la gravité, alors en remplaçant dans l'équation de la quantité de mouvement (1.1), on aboutit à

$$St \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\gamma M^2} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{Fr^2} \tilde{\rho} \tilde{f} \quad (1.3)$$

où les tildes indiquent des grandeurs sans dimension. Le coefficient adiabatique γ vaut 1,4 pour l'air considéré comme un gaz parfait.

Le **nombre de Mach** M est le rapport de la vitesse du vent avec la célérité du son :

$$M = U_{ref} / c \quad (1.4)$$

Il traduit les effets de compressibilité. Selon les hypothèses prises plus haut, ce nombre est petit devant 1. A titre indicatif, il est d'usage courant de tenir compte de la compressibilité à partir des nombres de Mach supérieurs à 0,3, soit des vitesses de référence supérieures à 360 km/h. Négliger la compressibilité de l'air pour l'effet du vent sur les structures s'avère tout à fait légitime.

Le **nombre de Strouhal** St est un paramètre fondamental car il représente le rapport de la longueur de référence avec la longueur parcourue par une particule fluide à la vitesse de référence pendant une durée de référence de l'écoulement, soit

$$St = \frac{B}{U_{ref} T_{ref}} \quad (1.5)$$

La signification physique de ce paramètre relative au détachement tourbillonnaire sera détaillée plus loin. Par essence, le nombre de Strouhal est un paramètre lié à l'écoulement ne tenant pas compte de la structure.

Il ne faut surtout pas le confondre avec la **fréquence réduite** qui s'utilise dès que l'on considère une structure en oscillation. Le phénomène traité est très différent bien que l'expression algébrique de la fréquence réduite soit la même que pour le nombre de Strouhal, en remplaçant la durée T_{ref} liée à l'écoulement par la période des oscillations T . La fréquence réduite permet de déterminer dans quelle mesure le mouvement du solide peut modifier l'écoulement. Lorsque sa valeur est petite devant 1, la distance parcourue par une particule fluide pendant une période d'oscillation est grande devant la largeur de la structure. L'écoulement se comporte comme si les oscillations n'existaient pas et on dit qu'il est quasi-stationnaire, c'est à dire qu'à chaque instant on peut le considérer stationnaire pour chaque position instantanée de la structure.

Le **nombre de Reynolds** Re constitue le paramètre déterminant pour l'effet d'échelle. Il représente physiquement le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses exercées sur une particule fluide, soit :

$$Re = \frac{\rho U_{ref} B}{\mu} = \frac{U_{ref} B}{\nu} \quad (1.6)$$

Pour mesurer un effort sur une structure, respecter l'analogie de Reynolds revient ainsi à respecter la proportion entre les forces de cisaillement liées à la viscosité, et les forces de pression résultant de la vitesse du fluide. De fait, l'analogie de Reynolds introduit la similitude sur les couches limites où s'exercent notamment les efforts de viscosité et d'autres phénomènes plus complexes comme les décollements. Il permet en quelque sorte de garantir que les efforts mesurés sur une maquette pourront s'extrapoler à la structure réelle.

A titre indicatif, en prenant un pont de 30 mètres de large ayant une période propre de 5 secondes, et soumis à un vent de 97 km/h (27 m/s), alors la fréquence réduite vaudra 0.22 et le nombre de Reynolds $54 \cdot 10^6$. En règle général, l'effet du vent sur les ouvrages s'étudie donc dans des conditions de très grand nombre de Reynolds (en dizaine de millions) et des fréquences réduites assez faibles (autour de l'unité).

Le **nombre de Froude** Fr est le rapport des forces d'inertie avec les forces de gravité. La similitude qu'il établit est souvent négligée sauf pour les ponts suspendus où les forces de pesanteurs jouent un rôle important.

$$Fr = \frac{U_{ref}}{\sqrt{B g}} \quad (1.7)$$

Naturellement, il existe d'autres contraintes de similitude pour des essais en soufflerie : en particulier les paramètres liés à la turbulence et la couche limite atmosphérique doivent être correctement reproduits.

L'**intensité de turbulence** I_u est le rapport entre la moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse u et la vitesse moyenne de référence U_{ref} . L'intensité est généralement donnée en pourcentage.

$$I_u = \frac{\sigma_u}{U_{ref}}, \text{ avec } \sigma_u^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \quad (1.8)$$

On définit de manière identique les intensités de turbulence pour les composantes v et w de la vitesse.

1.1.5. Classification des écoulements

Les écoulements autour des structures se classent en deux catégories principales qui sont conditionnées par la forme générale des structures : profilées ou non profilées.

Une structure profilée se caractérise par des formes arrondies, sans arrête vive, et une dimension longitudinale très supérieure à son épaisseur transversale. Le bord de fuite, qui est la partie arrière, est formé de manière à produire une terminaison sans surface perpendiculaire à l'axe longitudinal. L'archétype en est le profil d'aile d'avion à faible incidence. L'écoulement autour des parois et dans le sillage reste peu perturbé par la présence de la structure comme schématisé *figure 1.2*. On dit dans ce cas que l'écoulement est non décollé, c'est à dire que la vitesse du fluide au voisinage des parois tend à leur rester globalement parallèle.

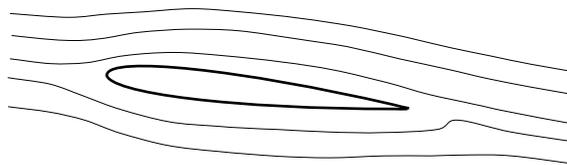


Figure 1.2. Exemple d'un écoulement non décollé autour d'un profil d'aile.

Dans le cas des ouvrages soumis au vent, les formes ne sont a priori pas spécialement dessinées selon des critères liés aux écoulements. Elles comportent souvent des arrêtes vives et leur forme générale s'éloigne du profil d'aile idéal. En particulier, le bord de fuite comporte un culot produisant un sillage important comme schématisé *figure 1.3*. Au voisinage des parois, la vitesse peut subir de très fortes perturbations jusqu'à présenter une inversion de sens sous la forme de tourbillons. On dit dans ce cas que la couche limite est décollée parce que l'écoulement principal ne semble plus adhérer à la paroi.

Cette notion de décollement est fondamentale pour appréhender certains phénomènes tels que le détachement de tourbillons ou bien le décrochage. Le décollement de couche limite produit en outre des efforts de traînée qui sont beaucoup plus importants que lorsque l'écoulement reste attaché.

On peut classer les décollements de couche limite en deux catégories, selon que la paroi est à surface courbe ou bien à arrêtes vives (*figure 1.4*). Pour les parois arrondies, le point de décollement est situé à une position qui est souvent instable dans le temps et l'espace.

Dans le cas d'une forme anguleuse, le décollement va au contraire se produire invariablement sur l'arrête. Notons aussi qu'une imperfection de surface placée sur une forme courbe agit comme une arrête en fixant le point de décollement sur cette imperfection.

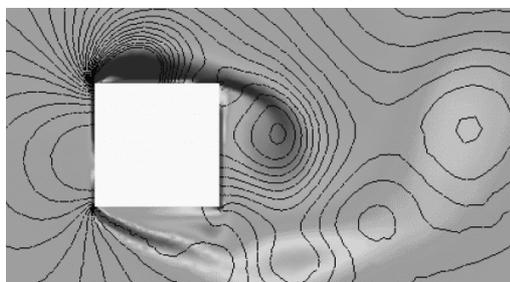


Figure 1.3. Exemple d'un écoulement décollé autour d'un cylindre carré (distribution de vorticité et iso-contours de pression).

En résumé, on peut donc classer les structures en deux catégories aérodynamiques assez distinctes :

- les formes profilées, autour desquelles les écoulements restent attachés, mais qui sont exceptionnelles dans le domaine des ouvrages et sont principalement utilisées en aéronautique.
- les structures non profilées qui produisent à leur voisinage des écoulements très perturbés à cause des décollements. Elles représentent la très grande majorité des ouvrages.

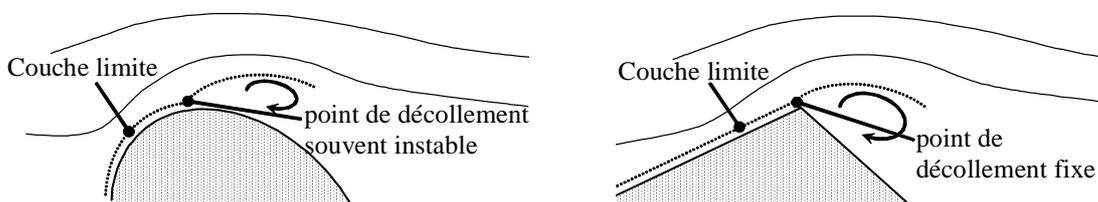


Figure 1.4. Deux types de décollement de couche limite.

1.2. Les charges aérodynamiques

Les charges aérodynamiques peuvent s'évaluer localement sur une structure à l'aide de la distribution de pression à la paroi, ou bien globalement grâce à un torseur d'efforts.

1.2.1. Définition des actions de pression et coefficient de pression

L'action de la pression s'effectue en vertu du principe de Cauchy selon la normale à la paroi et proportionnellement à la pression statique p . Aussi, l'effort élémentaire dF exercé sur un élément de surface ds de vecteur normal unitaire N s'écrit simplement :

$$dF = -p ds N \tag{1.9}$$

Le signe moins est conventionnel et dépend du sens choisi pour le vecteur N .

Cependant, l'action de la pression statique ne représente pas tout l'effort exercé localement. En effet, l'écoulement d'un fluide visqueux produit une couche limite caractérisée par un gradient de vitesse à la paroi. Ce gradient est selon l'hypothèse d'un fluide newtonien linéaire avec les contraintes de cisaillement qui en découlent. Il s'ajoute donc à l'effort de pression un terme de frottement qui est dû à la viscosité du fluide.

En pratique pour les structures non profilées, ce terme de frottement est négligeable devant l'action de la pression. Pour les structures profilées comme une aile d'avion, le terme de frottement contribue au contraire de manière équivalente à l'effort de traînée de sorte qu'il n'est pas possible de le négliger.

En pratique la pression est rendue adimensionnelle. Comme elle dépend de la vitesse de l'écoulement, on a coutume de la présenter sous la forme d'un coefficient de pression noté C_p donné par :

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2} \quad (1.10)$$

Les valeurs de référence utilisées sont des grandeurs moyennes généralement prélevées à l'amont de la maquette par exemple à l'aide d'un tube de Prandtl. La pression de référence choisie en pratique est souvent la pression statique en amont. Ainsi, un coefficient de pression ne pourra jamais avoir une valeur supérieure à 1 car en appliquant le théorème de Bernoulli en stationnaire, la valeur maximale possible de p est la pression d'arrêt p_0 ce qui donne bien un coefficient au maximum égal à 1.

À l'arrière d'une structure non profilée, le coefficient de pression est négatif, sans borne inférieure en théorie. La traînée de ce type de structure est principalement occasionnée par cette forte dépression que l'on appelle l'effet de culot.

Le coefficient de pression est un paramètre généralement indépendant de la vitesse de l'écoulement et lié uniquement à la géométrie de la structure. Il peut dépendre du nombre de Reynolds à cause notamment des variations de position des points de décollement et de recollement de couche limite sur les structures non profilées.

1.2.2. Définition des efforts et des moments aérodynamiques

Connaissant la distribution de pression pariétale, il est assez aisé d'en réaliser l'intégration afin d'obtenir des efforts globaux. Mais on peut également être amené à mesurer directement ces efforts à l'aide de balances aérodynamiques. Dans ce cas, il est indispensable de définir au préalable le référentiel dans lequel est représenté le torseur. Les aérodynamiciens ont coutume d'exprimer les efforts dans le trièdre lié au vent (par tradition le trièdre Eiffel), mais pour le calcul des ouvrages, il est souvent plus commode de travailler dans le trièdre lié à la structure (dit le trièdre Lilienthal).

En employant les notations de la *figure 1.5* le trièdre lié au vent d'axes (O, D) et (O, L) est obtenu par rotation d'angle α avec le trièdre lié à la structure d'axes (O, x) et (O, z). Dans le cas tridimensionnel,

on peut ajouter l'axe (O, y) perpendiculaire au plan de la figure. Dans tous les cas, les trièdres sont directs. L'angle α est l'angle d'incidence.

Le torseur d'efforts tridimensionnel dans le trièdre structure est constitué de 3 forces et de 3 moments :

- la force de traînée F_x , la force de dérive F_y , la force de portance F_z ,
- le moment de roulis M_x , le moment de tangage M_y et le moment de lacet M_z .

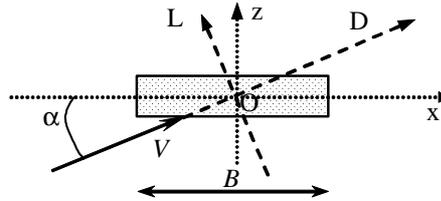


Figure 1.5. Notations pour les trièdres de référence bidimensionnels.

Dans le cas bidimensionnel, en considérant le plan vertical, seuls les forces de traînée et de portance et le moment de tangage sont significatifs. Les efforts aérodynamiques sont généralement donnés sous forme de coefficients sans dimension, ce qui permet facilement de transposer un effort mesuré sur une maquette à un effort sur l'ouvrage réel. On définit donc les coefficients de force par :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S} ; C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S} ; C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S} \quad (1.11)$$

où S est une surface de référence, par exemple la surface du tablier d'un pont.

Lorsque les efforts sont donnés dans un contexte bidimensionnel, on raisonne sur des efforts par unité de longueur et la surface de référence S est remplacée habituellement par la largeur B de la structure. Cependant, on doit porter une attention toute particulière à la longueur effectivement prise comme référence pour le calcul des coefficients sans dimension. Il arrive parfois que le coefficient de traînée soit défini à l'aide de l'épaisseur ce qui peut représenter une source d'erreur importante.

Les coefficients de traînée et de portance en axes vent seront notés C_D et C_L respectivement.

Les coefficients de moment sont donnés par

$$C_\ell = \frac{M_x}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S B} ; C_M = \frac{M_y}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S B} ; C_N = \frac{M_z}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2 S B} \quad (1.12)$$

En deux dimensions, seul le coefficient de tangage C_M est utilisé et caractérise le moment de torsion par unité de longueur. En général, on choisira l'axe passant par le milieu de la structure pour définir le moment de tangage.

De même que pour les forces, la longueur de référence choisie pour les coefficients de moment peut être différente de la largeur B , en particulier on trouve parfois des coefficients basés sur la demi

largeur. Il faut en pratique systématiquement contrôler les grandeurs de référence avant d'utiliser des coefficients dans un calcul.

En résumé, pour une section bidimensionnelle de largeur B , le torseur des coefficients par unité de longueur sera donc dans le repère de la structure :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_{ref}^2 B} = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha ; C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U_{ref}^2 B} = C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha$$

$$C_M = \frac{M_y}{\frac{1}{2}\rho U_{ref}^2 B^2} \quad (1.13)$$

Dans ce contexte bidimensionnel, il convient de présenter quelques remarques sur différents points qui seront utilisés par la suite. En effet, la grande part des notions abordées ici est issue du milieu aéronautique et appliquée habituellement au profil d'aile ; leur extension aux tabliers de pont notamment nécessite des précautions.

1.2.3. Le centre de poussée

Le centre de poussée se définit habituellement comme le point d'application de la force de portance, c'est à dire qu'il est lié à la façon dont la pression pariétale se répartit de part et d'autre de l'axe longitudinal de l'aile ou du tablier. Il s'agit en quelque sorte d'un point analogue au centre de gravité mais où la répartition de la masse serait remplacée par la répartition de la pression aérodynamique. Sa position se déduit facilement à l'aide du moment de tangage et de la portance, $x_p = C_M / C_z$ où x_p est la distance entre le centre de poussée et le point de référence du moment de tangage.

La position de ce point n'est pas fixe en fonction de l'angle d'incidence. En général pour un profil d'aile, sa position par rapport au bord d'attaque est environ au 3/4 de corde à incidence nulle, et tend à se déplacer vers l'avant jusqu'à 1/4 lorsque l'incidence augmente. Lorsque la portance s'annule, il n'existe plus à proprement parler de centre de poussée, alors que dans le même temps le moment de tangage n'est pas nécessairement nul. En réalité, le centre de poussée doit être considéré comme un point de référence lié aux efforts aérodynamiques statiques.

1.2.4. Le foyer aérodynamique

L'idée consiste à trouver un point fixe de référence, le foyer aérodynamique, qui n'entraîne pas de modification du moment de tangage lorsque l'angle d'incidence varie. Le coefficient de moment de tangage pris par rapport au foyer s'écrit $C_{MF} = C_M + \frac{x_F}{B} C_z$ où $\frac{x_F}{B}$ représente la distance relative entre le foyer et le point de référence choisi pour le coefficient de moment de tangage C_M , généralement le milieu du tablier. La dérivée de cette expression par rapport à l'angle d'incidence doit être nulle par définition du foyer, ce qui conduit à

$$\frac{x_F}{B} = -\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} / \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial C_M}{\partial C_z} \quad (1.14)$$

à la condition impérative que la position du foyer soit fixe ou varie très peu, c'est-à-dire $\frac{\partial x_F}{\partial \alpha} \cong 0$. En

fait cette dernière condition est arbitraire, mais l'expérience montre en pratique qu'elle est vérifiée tant que l'incidence ne varie pas trop. Du reste, il est toujours possible de réévaluer systématiquement la position du foyer à l'aide des gradients de portance et de tangage pris à l'incidence de travail.

Pour un profil d'aile mince, le foyer se situe environ au 1/4 de corde par rapport au bord d'attaque et reste à cette position tant que le régime d'écoulement n'est pas décroché. Pour un tablier de pont, on ne peut pas prédire a priori sa position, mais connaissant les évolutions des coefficients aérodynamiques avec l'incidence, on peut toujours calculer la position d'un foyer pour une incidence donnée.

Dans un contexte de stabilité aéroélastique, le foyer constitue le point de référence dominant car on montre qu'il est le point d'application de variations des efforts (de portance notamment) autour de leur composante statique.

1.2.5. Influence du nombre de Reynolds et de la turbulence

L'influence du nombre de Reynolds et de la turbulence de l'écoulement amont est très importante sur la distribution des pressions à la surface des structures et par conséquent sur les efforts. Les paramètres de la turbulence et le nombre de Reynolds ne sont pas indépendants et provoquent des effets, d'une part sur la couche limite et d'autre part sur les points de recollement.

Lorsque le nombre de Reynolds est assez bas, et que la turbulence amont est faible, la couche limite reste laminaire. Si on augmente le nombre de Reynolds, ou bien si la turbulence amont est forte, cette couche limite devient turbulente. Pour un corps non profilé, le décollement de couche limite est inévitable. Or une couche limite turbulente possède la propriété d'adhérer plus longtemps sur les parois qu'une couche limite laminaire. Sur une surface convexe, comme illustré *figure 1.6* le décollement d'une couche limite laminaire se produira avant le sommet de la surface, tandis qu'une couche limite turbulente se séparera plus loin, car elle résiste mieux au gradient de pression adverse.

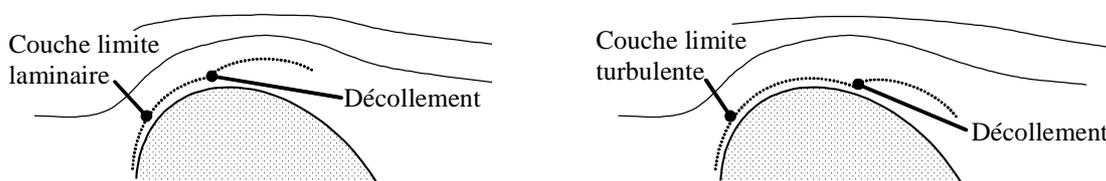


Figure 1.6. Décollement d'une couche limite laminaire ou turbulente.

Nous avons déjà mentionné le fait que la traînée des corps non profilés était principalement produite par l'effet de culot. Aussi la traînée produite par le décollement de la couche limite laminaire sera plus forte, puisque la zone de séparation est plus grande, que pour une couche limite turbulente.

En général, la couche limite qui se développe à la surface d'une paroi est d'abord laminaire, puis devient turbulente. La position de la zone de transition est fortement influencée par le nombre de Reynolds ou par la présence de rugosités à la surface des parois qui agissent alors comme des déclencheurs de la turbulence (effet « balle de golf »). Cette propriété est largement utilisée en soufflerie pour parer à l'effet d'échelle sur les maquettes.

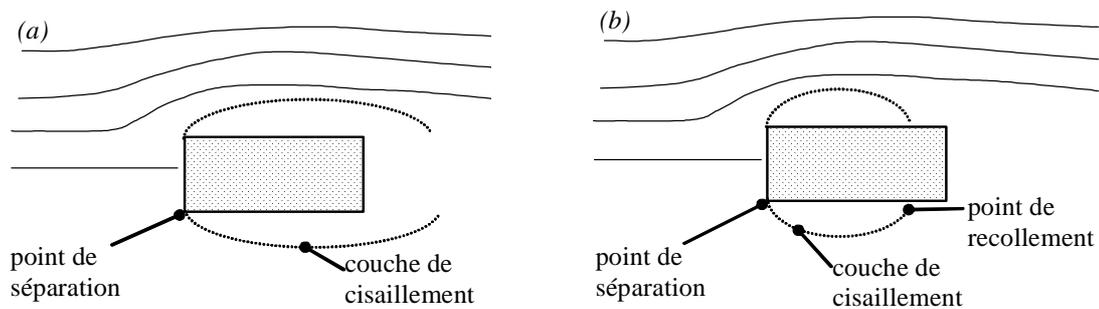


Figure 1.7. Cylindre rectangulaire en écoulement faiblement (a) ou fortement (b) turbulent.

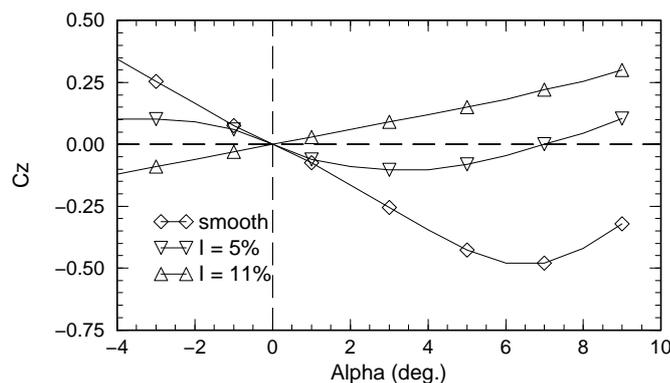


Figure 1.8. Effet de la turbulence sur le coefficient de portance d'un rectangle de rapport 2:1

Enfin le nombre de Reynolds et la turbulence ont également une influence sur l'emplacement du point de recollement des couches de cisaillement. Les conséquences sont très importantes en aéroélasticité. Par exemple, pour un rectangle de faible allongement *figure 1.7(a)* en écoulement faiblement turbulent, les lignes de séparation ne recollent pas sur l'arrière du rectangle. Cette configuration conduit notamment à un gradient de portance négatif, un élément important dans la stabilité aéroélastique. Si pour le même rectangle on augmente le taux de turbulence amont, *figure 1.7(b)*, les lignes de séparation rejoignent l'arrière du rectangle en créant un point de recollement. Dans ce cas, la dérivée de la portance par rapport à l'angle d'incidence change de signe, comme illustré *figure 1.8*. (cf. aussi annexe 3).

En résumé, il faut retenir que le nombre de Reynolds et les caractéristiques turbulentes agissent principalement dans la couche limite sur les points de transition laminaire/turbulent et sur la position des décollements et des recollements.

1.3. Le détachement tourbillonnaire

1.3.1. Description générale

L'existence d'un détachement, ou d'un échappement de tourbillons à l'arrière d'un obstacle placé dans un écoulement est relativement connue du public. Sur un plan historique, le phénomène a été étudié au début du siècle expérimentalement par Henri Bénard en France et théoriquement par Theodor Von Kármán en Allemagne. Aussi, le nom de tourbillons de Bénard-Kármán est largement utilisé. Bien qu'à l'origine l'obstacle employé était une plaque plane placée perpendiculairement à l'écoulement, ces tourbillons ont été largement étudiés à l'arrière du cylindre circulaire (*figure 1.9*).

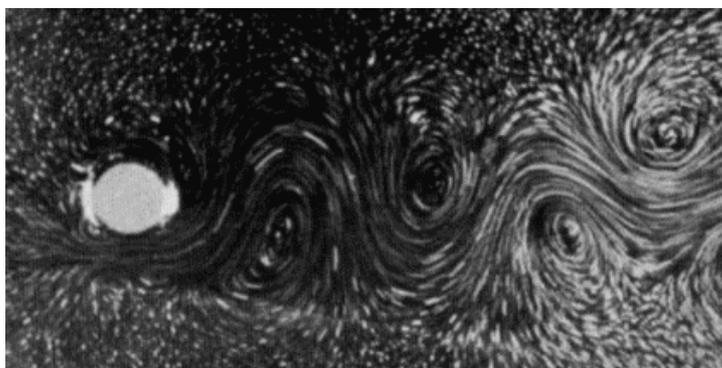


Figure 1.9. Tourbillons alternés derrière un cylindre circulaire à faible Re

En pratique, les tourbillons se détachent alternativement de chaque côté de l'obstacle pour former une rue de tourbillons alternés. Ce phénomène dépend du nombre de Reynolds car il prend naissance au sein de la couche limite, ou dans la couche de cisaillement pour les formes anguleuses.

D'une manière générale, les obstacles non profilés présentant une symétrie plus ou moins forte sont sujets à l'échappement tourbillonnaire. Sur des surfaces courbes, comme un cylindre circulaire, il existe une instabilité spatio-temporelle du point de décollement de la couche limite de part et d'autre du cylindre. Lorsque les formes sont anguleuses, le point de décollement est fixé sur l'arrête mais la couche de cisaillement subit également des instabilités qui induisent le déclenchement des tourbillons. Dans le cas du dimensionnement des structures, le paramètre le plus important de ce phénomène est la fréquence à laquelle se détachent les tourbillons car ils génèrent sur l'obstacle des forces de portance et de traînée fluctuantes quasi sinusoïdales.

1.3.2. Le nombre de Strouhal

On note X la distance entre 2 tourbillons d'une même rangée et U_c la vitesse d'avancement à laquelle ils sont convectés par l'écoulement amont de vitesse U (*figure 1.10*). La fréquence f_i du détachement tourbillonnaire est le nombre de tourbillons lâchés pendant une seconde, soit

$$f_t = U_c / X \quad (1.15)$$

L'obstacle possédant une dimension transversale D (le diamètre d'un cylindre circulaire), la fréquence sans dimension du détachement tourbillonnaire est le nombre de Strouhal tel que

$$St = \frac{f_t D}{U} = \frac{U_c D}{U X} \quad (1.16)$$

En pratique, le rapport entre la vitesse de convection des tourbillons et la vitesse de l'écoulement amont est une constante de l'ordre de 0.5, valeur qui reste valable quelque soit la forme de l'obstacle.

En revanche, la distance X varie en fonction du nombre de Reynolds et de la forme de l'obstacle. Pour un cylindre circulaire, cette distance est de l'ordre de 2,5 fois le diamètre et il s'ensuit donc d'après l'expression (16) que le nombre de Strouhal est proche de 0,2. L'annexe 2 donne des valeurs de nombre de Strouhal pour différentes sections d'obstacle.

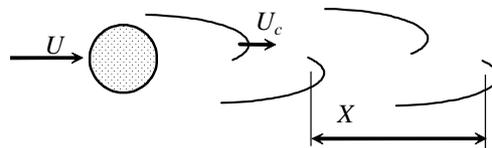


Figure 1.10. Morphologie des tourbillons alternés.

1.3.3. Influence de l'écoulement amont

Pour une section donnée, le nombre de Strouhal dépend de l'écoulement amont et notamment de la direction du vent. Généralement les changements de fréquence de l'échappement des tourbillons sont associés aux modifications de la morphologie de l'écoulement.

On rencontre trois types de tourbillons alternés (*figure 1.11*) en fonction du rapport longueur sur épaisseur :

- Pour des formes proches du carré, les tourbillons sont produits au bord d'attaque et se développent dans le sillage. C'est l'allée tourbillonnaire classique de Bénard-Kármán qui induit les efforts les plus élevés.
- Lorsque la dimension longitudinale de l'obstacle augmente les tourbillons précédents vont alternativement recoller directement l'arrière de l'obstacle ou le sillage proche. Cette morphologie conduit généralement à des efforts inférieurs aux tourbillons de Bénard-Kármán.
- Enfin si l'obstacle est nettement plus large que son épaisseur, ce qui est souvent le cas des tabliers, alors on constate habituellement la génération d'une seconde série de tourbillons au bord de fuite, les tourbillons de bord d'attaque étant quant à eux recollés latéralement à l'intérieur de la zone cisailée. Les efforts induits sont généralement faibles.

Un autre point important de l'échappement tourbillonnaire est son aspect tridimensionnel. En effet, toutes les descriptions et remarques précédentes sont relatives à des sections cylindriques bidimensionnelles. Or, pour le dimensionnement des structures il importe de connaître la longueur de corrélation de ces tourbillons le long de l'axe longitudinal des cylindres, c'est à dire la longueur moyenne le long du cylindre sur laquelle les tourbillons sont en phase.

L'expérience montre qu'en pratique, tant que la structure reste immobile dans l'écoulement, la longueur de corrélation de l'échappement tourbillonnaire est de l'ordre de deux à trois fois le diamètre (ou la dimension transversale). Une forte intensité de turbulence amont aura tendance à diminuer la longueur de corrélation, ce qui diminue d'autant les efforts induits sur les structures.

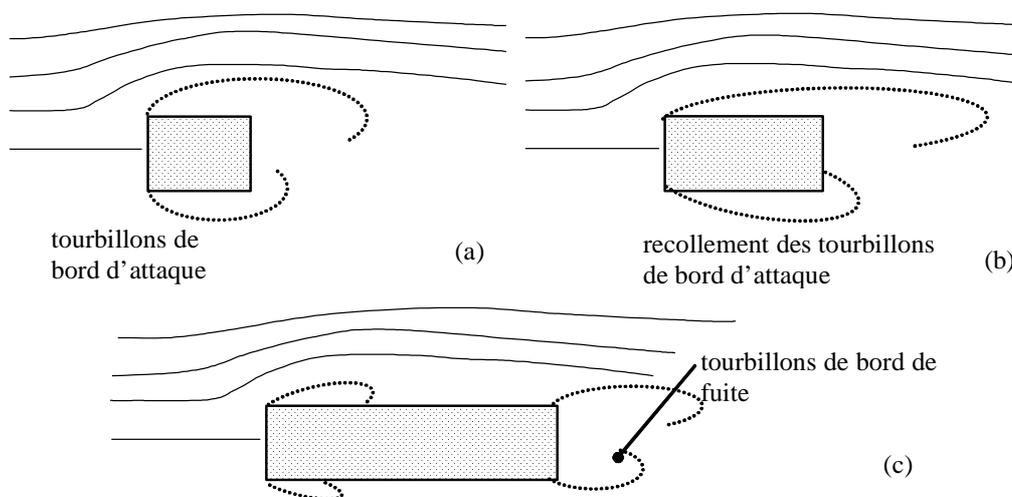


Figure 1.11. Les trois types de tourbillons alternés

1.4. Le vent turbulent

Pour l'étude de l'effet du vent sur les structures, il convient de connaître les propriétés du vent auquel sera soumis l'ouvrage. Or la vitesse du vent dans les basses couches atmosphériques varie en temps et en espace et il faut donc en tenir compte pour le calcul de la structure. Dans ce paragraphe on présente les concepts principaux utilisés plus loin et le lecteur est invité à se reporter à la littérature spécialisée pour approfondir ces notions.

Le profil de vitesse moyenne dans la basse couche limite atmosphérique est généralement pris sous forme logarithmique :

$$\bar{U}(z) = U_{ref} k_r(z_0) \ln \left[\frac{z}{z_0} \right] \quad (1.17)$$

où la hauteur de rugosité z_0 et le coefficient de rugosité k_r dépendent de la nature du terrain et des obstacles qui s'y trouvent. En pratique, la hauteur de rugosité varie de 5 mm au dessus de plans d'eau à 2 m dans les zones de forte urbanisation. Dans le même temps le coefficient k_r varie respectivement entre 0.16 et 0.25.

La turbulence du vent est décrite habituellement par un petit nombre de paramètres dont l'ambition première est d'être pragmatique en donnant des expressions simples à utiliser pour les calculs des effets du vent. Dans la pratique, les données de référence fondamentales comme l'intensité de turbulence sont fixées par cahier des charges, le plus souvent à l'aide d'évaluations météorologiques.

1.4.1. Spectres de turbulence

Le spectre de turbulence permet de décrire la répartition de l'énergie des fluctuations (dont l'intégrale est fixée par l'intensité de turbulence) en fonction de la fréquence f . Il existe différentes formulations empiriques comme par exemple celle de Kaimal, mais la plus employée est la formulation de Von Kármán ayant une meilleure représentation aux basses fréquences. Le spectre de la vitesse longitudinale u s'exprime par

$$\frac{S_u(f)}{\sigma_u^2} = \frac{4 \ell_u^x}{\bar{U}(z)} \frac{1}{\left(1 + 70.7 \left(\frac{f \ell_u^x}{\bar{U}(z)}\right)^2\right)^{5/6}} \quad (1.18)$$

où ℓ_u^x est la composante en x de l'échelle de turbulence longitudinale. Cette échelle est obtenue en ajustant le spectre ci-dessus aux mesures. Elle est différente de l'échelle de turbulence classique définie à partir des fonctions de corrélation. Les échelles de turbulence font généralement partie des données fournies par le cahier des charges.

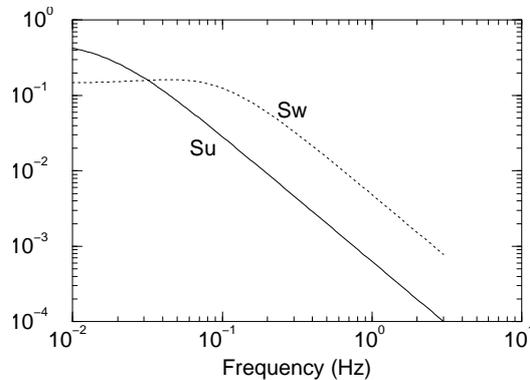


Figure 1.12. Spectres typiques de Von Kármán

Pour les deux autres composantes latérale et verticale, le spectre de Von Kármán s'écrit

$$\frac{S_k(f)}{\sigma_k^2} = \frac{4 \ell_k^x}{\bar{U}(z)} \frac{1 + 188.4 \left(\frac{2 f \ell_k^x}{\bar{U}(z)}\right)^2}{\left(1 + 70.7 \left(\frac{2 f \ell_k^x}{\bar{U}(z)}\right)^2\right)^{11/6}} \quad (1.19)$$

avec $k = v$ ou w . Pour illustration on donne *figure 1.12* les spectres longitudinaux et verticaux pour des échelles de 250 et 30 m respectivement (vent de mer, cf. *tableau 1.1*).

1.4.2. Fonctions de cohérence et de corrélation

Les fonctions de cohérence permettent dans le domaine fréquentiel de tenir compte de la dimension spatiale des rafales de vent car celles-ci ont une taille limitée. Dans le cas de grands ouvrages, une rafale ne peut envelopper toute la structure simultanément ce qui limite les efforts associés.

Dans la couche limite atmosphérique, la taille des rafales de vent est variable selon la composante de vitesse, les directions spatiales et la fréquence. Le modèle le plus utilisé et le plus simple pour tenir compte de toutes ses variations est la fonction de cohérence exponentielle

$$\gamma_k^i(f) = \exp\left[-C_k^i \frac{|\Delta_i| f}{\bar{U}(z)}\right] \quad (1.20)$$

où l'indice $k = u, v, w$ et $i = x, y, z$. Le coefficient de décroissance exponentielle C_k^i (9 coefficients) est réel positif, généralement donné par le cahier des charges. Δ_i désigne la distance entre deux points sur la coordonnée i . Les *tableaux 1.1* donnent des valeurs de paramètres typiques pour des vents de mer et de montagne.

composante	σ/\bar{U}	ℓ^y (m)	C^y	composante	σ/\bar{U}	ℓ^y (m)	C^y
u	0.09	200	11	u	0.16	250	12
v	0.075	65	4.5	v	0.16	70	12
w	0.05	35	12	w	0.12	30	9

Tableau 1.1. Paramètres typiques d'un vent de mer et en montagne

Les équivalents des fonctions de cohérence dans le domaine temporel sont les fonctions de corrélation. Pour l'effet du vent sur les structures on s'intéresse principalement aux coefficients de corrélation verticale (en z) et latérale (en y) de la vitesse longitudinale u au même instant. On les modélise à l'issue des observations à l'aide d'exponentielles décroissantes

$$R_u^i = \exp\left[-\frac{\Delta_i}{L_u^i}\right] \quad (1.21)$$

où les échelles spatiales de la turbulence sont L_u^i . Dans la pratique on résout habituellement les problèmes d'excitation par la turbulence dans le domaine fréquentiel ce qui fait que les fonctions de corrélation sont peu utilisées, contrairement aux fonctions de cohérence. On peut mentionner toutefois l'émergence de méthode de calcul temporel nécessitant l'emploi des fonctions de corrélation.

2. Phénomènes aéroélastiques

2.1. Introduction

On admet généralement que les forces fluctuantes exercées par un écoulement fluide sur une structure qui vibre sont de trois types fondamentaux :

- Les efforts quasi-périodiques produits par le détachement tourbillonnaire alterné sont quasiment indépendants du mouvement de la structure lorsque les fréquences sont différentes. En cas de résonance, il existe un couplage entre le détachement des tourbillons et les oscillations, c'est l'accrochage.
- Lorsque l'écoulement est turbulent, les fluctuations de vitesse peuvent provoquer des vibrations de faible amplitude. Le couplage de ces forces induites par la turbulence avec le mouvement de la structure est faible, voire nul.
- Comme la structure bouge, y compris par rapport à ses voisines, elle modifie l'écoulement autour d'elle, qui en retour modifie les efforts sur la structure. Il existe donc des forces de couplage aéroélastiques induites par le mouvement qui peuvent devenir très importantes.

Ce chapitre présente les différents phénomènes énoncés ci-dessus. En ce qui concerne les efforts couplés avec le mouvement, l'usage consiste à étudier des efforts aérodynamiques exprimés comme des combinaisons linéaires des composantes du mouvement et de leur vitesse : pour la force de portance et le moment de tangage couplés avec le mouvement de translation z et de l'angle de torsion α on a donc

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_1 \dot{z} + H_2 \dot{\alpha} + H_3 \alpha + H_4 z) \\ M_O = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_1 \dot{z} + A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha + A_4 z) \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette modélisation introduit les séries de **coefficients aéroélastiques** H_i et A_i qui sont des coefficients de linéarisation. Ces séries de coefficients sont appelées les **dérivées de flottement**, à juste titre

puisqu'elles sont issues d'une approximation des efforts aérodynamiques par un développement de Taylor à l'ordre 1. Elles sont souvent exprimées sous forme adimensionnelle en écrivant

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 \left(H_1^{\#} \frac{\dot{z}}{U} + H_2^{\#} \frac{c \dot{\alpha}}{U} + H_3^{\#} \alpha + H_4^{\#} \frac{z}{c} \right) \\ M_o = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 \left(A_1^{\#} \frac{\dot{z}}{U} + A_2^{\#} \frac{c \dot{\alpha}}{U} + A_3^{\#} \alpha + A_4^{\#} \frac{z}{c} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce chapitre on va principalement utiliser la modélisation (2.2) pour étudier les différents cas de flottement rencontrés en pratique. Il ne s'agit en premier lieu que d'exposer les aspects physiques et l'on se restreindra à des corps rigides en mouvement de petite amplitude. Le chapitre se termine ensuite sur l'étude de l'excitation par la turbulence et le détachement tourbillonnaire.

2.2. La fréquence réduite

La fréquence réduite f_r constitue un paramètre très important puisqu'il va conditionner le mode opératoire pour l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure en présence d'écoulement. Ce nombre est défini comme le rapport de deux durées liées au système étudié : la première est le temps de balayage de la structure par une particule fluide (T_f), tandis que la seconde est la période de vibration propre de la structure ($T_s = 1/f_s$). Nous avons donc :

$$f_r = \frac{T_f}{T_s} = \frac{B/U}{T_s} = \frac{B f_s}{U} \quad (2.3)$$

L'inverse de la fréquence réduite est appelé la vitesse réduite. Il arrive également que l'on rencontre une définition de f_r basée sur la pulsation propre au lieu de la fréquence propre. Il s'ensuit un rapport 2π avec l'expression (24). Elle est généralement notée $K = 2\pi f_r$ dans la littérature. Au plan aéroélastique, il existe 3 régimes qui sont différenciés par la fréquence réduite :

Si f_r est très supérieure à 1, la structure vibre à une fréquence élevée et une particule fluide qui la balaye aura le temps de "voir" plusieurs périodes du mouvement. Aussi, les paramètres aérodynamiques doivent être calculés ou mesurés en tenant compte des fluctuations engendrées par le mouvement du corps. Dans la pratique, ce régime est souvent développé pour des fréquences propres élevées, dans le domaine de l'acoustique : cette gamme d'interactions fluide-structure relève de la vibroacoustique.

Si f_r est proche de 1, un véritable couplage fluide-structure se produit, puisque le temps de balayage par le fluide correspond à la période de vibration propre de l'obstacle. Ce régime traditionnellement dénommé interaction fluide-structure constitue un problème extrêmement complexe sur le plan de la mécanique des fluides. En particulier les amplitudes des mouvements peuvent devenir très grandes et les effets non linéaires prépondérants.

Lorsque f_r est très inférieure à 1, le fluide n'a pas le temps d'être influencé par le mouvement de l'obstacle. Tout se passe donc comme si la structure était quasiment immobile, et les caractéristiques aérodynamiques n'évoluent pas au cours du temps (on ne considère pas ici les effets dus à la turbulence). Ce mode d'interaction fluide-structure relève de l'aéroélasticité. En pratique, il faut associer une vitesse importante et des vibrations basse fréquence pour se situer dans cette plage : c'est le cas de l'effet du vent sur les constructions et de la mécanique du vol.

Dans ce cours on s'intéresse au régime de faible fréquence réduite. Lorsque celle-ci est particulièrement faible, il est légitime de considérer que les oscillations n'influencent pas du tout l'écoulement autour de la structure, et qu'un changement lié au mouvement du solide s'applique instantanément à l'écoulement et l'effort produit. Cette **théorie quasi-statique** (QST, quasi-steady theory) sera discutée plus en détail au chapitre suivant, mais en attendant elle permet d'utiliser des coefficients aérodynamiques statiques, c'est-à-dire évalués sur une structure immobile, pour calculer les dérivées de flottement.

2.3. Le flottement classique

Le flottement classique du profil d'aile est apparu lorsque les avions de type monoplan ont commencé à atteindre des vitesses élevées. Par tradition le flottement classique est un phénomène de couplage entre les mouvements de flexion verticale et de torsion d'une voilure. Il s'agit donc d'un couplage à deux degrés de liberté.

2.3.1. Mise en équation

Le profil d'aile bidimensionnel présenté *figure 2.1* peut osciller en translation verticale sur l'axe z et en rotation d'angle α autour du point O. Le centre de gravité G est éloigné du centre de torsion O de la distance $d = \overline{GO}$. Le foyer aérodynamique est F et supposé fixé au quart de la corde c . Les équations du mouvement, en négligeant les termes d'amortissement, s'écrivent pour de petits mouvements

$$\begin{cases} m \ddot{z} + k_z z + m d \ddot{\alpha} = F_z \\ J_O \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha + m d \ddot{z} = M_O \end{cases} \quad (2.4)$$

où le couplage entre les deux mouvements est présent à cause du décalage entre le centre de torsion et le centre de gravité. Les forces aérodynamiques sont la portance F_z et le moment de tangage M_O . La masse du profil est m et son moment d'inertie par rapport à O est J_O . Les deux raideurs de chaque degré de liberté sont les termes k_z et k_α . Les valeurs propres découplées de chaque mouvement sont données par

$$\begin{cases} \lambda_\alpha = \omega_\alpha^2 = (2\pi f_\alpha)^2 = k_\alpha / J_O \\ \lambda_z = \omega_z^2 = (2\pi f_z)^2 = k_z / m \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système étant couplé, il est intéressant de le qualifier dans un premier temps sans excitation extérieure, c'est-à-dire de rechercher les valeurs propres λ_1 et λ_2 de

$$\begin{cases} \ddot{z} + \lambda_z z + d \ddot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} + \lambda_\alpha \alpha + \frac{md}{J_O} \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Cela revient à résoudre

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_z & \lambda d \\ \frac{\lambda md}{J_O} & \lambda - \lambda_\alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (2.7)$$

qui conduit notamment à la relation $1 - \frac{md^2}{J_O} = \frac{\lambda_z + \lambda_\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

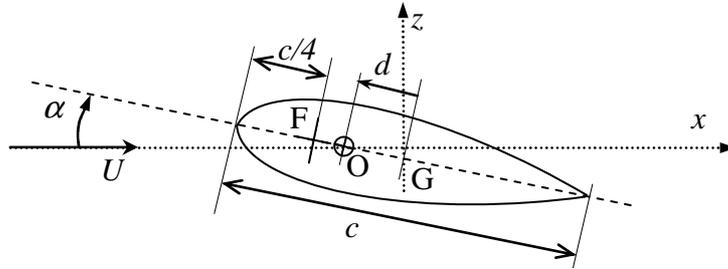


Figure 2.1. Configuration d'un profil d'aile en couplage flexion-torsion

Les deux efforts aérodynamiques sont a priori des fonctions du mouvement. En négligeant les termes d'amortissement, on écrit ainsi

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_3 \alpha + H_4 z) \\ M_O = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_3 \alpha + A_4 z) \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans le cas présent, il n'existe aucune raison pour que les efforts sur le profil d'aile varient en fonction du mouvement de translation verticale. En revanche leur variation en fonction de l'angle α correspond de manière évidente à une variation de l'angle d'incidence, ce qui amène

$$\begin{cases} H_3 = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = C_z'; & H_4 = 0 \\ A_3 = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = C_M'; & A_4 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Finalement le système couplé initial (2.6) s'écrit sous la forme linéarisée

$$\begin{cases} \ddot{z} + \lambda_z z + d \ddot{\alpha} = \frac{\rho c U^2}{2m} C_z' \alpha \\ \ddot{\alpha} + \lambda_\alpha \alpha + \frac{md}{J_O} \ddot{z} = \frac{\rho c^2 U^2}{2J_O} C_M' \alpha \end{cases} \quad (2.10)$$

dont on étudie maintenant la stabilité en fonction de la vitesse du vent U .

2.3.2. Stabilité et vitesse critique

Etudier la stabilité du mouvement consiste en fait à trouver la vitesse critique U_c au-delà de laquelle le mouvement est amplifié. On est donc conduit à chercher les valeurs propres du système (2.10) et résoudre

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_z & \lambda d + \frac{\rho c U^2}{2m} C_z' \\ \frac{\lambda m d}{J_O} & \lambda - \lambda_\alpha + \frac{\rho c^2 U^2}{2J_O} C_M' \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

On suppose ici que la divergence en torsion pure (cf. §2.3.1) n'a lieu que pour des vitesses de vent plus élevée que l'instabilité de flottement par couplage de mode, c'est-à-dire que $\lambda_\alpha > \rho c^2 U^2 C_M' / 2J_O$. Le système (2.11) correspond donc à une équation du second degré en λ , soit

$$F \lambda^2 + G \lambda + H = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F = 1 - md^2 / J_O \\ G = \lambda_z + \lambda_\alpha + \rho c U^2 (d C_z' - c C_M') / 2J_O \\ H = \lambda_z (\lambda_\alpha - \rho c^2 U^2 C_M' / 2J_O) \end{cases} \quad (2.12)$$

En rappelant que le gradient de portance d'un profil mince est positif (égal à 2π en écoulement potentiel) alors on constate que les trois termes F , G et H sont tous positifs. Si les solutions de (2.12) sont réelles, elles seront donc de même signe et négatives.

Or le mouvement cherché doit être

- soit du type sinusoïdal amorti avec deux solutions réelles négatives,
- soit amplifié avec des solutions complexes conjuguées, où l'une des parties imaginaires est négative et caractérise donc un mode instable.

L'instabilité de flottement se produira à la limite de ces deux régimes lorsque les valeurs propres deviennent identiques. Le flottement classique est donc une instabilité par confusion de fréquence, c'est-à-dire que les deux fréquences initiales du système, comme illustré *figure 2.2*, évoluent avec la vitesse pour se confondre à la vitesse critique. Au delà du point critique, l'un des deux mouvements est instable, c'est-à-dire qu'il prélève de l'énergie à l'écoulement.

Rechercher la vitesse de flottement consiste à calculer la vitesse pour laquelle le discriminant de l'équation (2.12) devient nul. On note p la distance du centre de torsion O au foyer F . Par définition on a (cf. §1.2.4)

$$p = -c C_M' / C_z' . \quad (2.13)$$

En écrivant que le discriminant de (2.12) est nul il vient après arrangement

$$F' Y^2 + 2G' Y + H' = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F' = (d + p)^2 \\ G' = (d + p)(\lambda_z + \lambda_\alpha) - 2p \lambda_z (1 - md^2/J_O) \\ H' = (\lambda_z + \lambda_\alpha)^2 - 4\lambda_\alpha \lambda_z (1 - md^2/J_O) \end{cases} \quad (2.14)$$

où $Y = \rho c U^2 C_z' / 2J_O$. La vitesse critique s'écrit alors

$$U_c^2 = \frac{2J_O}{\rho c C_z'} \frac{-G' \pm \sqrt{G'^2 - F'H'}}{F'} \quad (2.15)$$

Evidemment on suppose qu'une solution positive existe et que le terme sous la racine est positif. Cette condition n'est respectée que dans certaines configurations à cause des signes respectifs des distances algébriques d et p , c'est-à-dire pour des positions relatives spécifiques des différents points remarquables F , G et O du profil d'aile. L'expression (2.15) est relativement compliquée à analyser du point de vue mécanique. Afin de poursuivre le raisonnement on s'intéresse maintenant à des configurations particulières rencontrées dans la pratique.

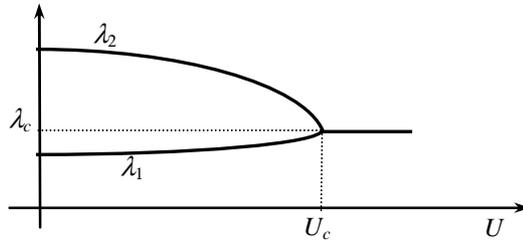


Figure 2.2. Evolution des valeurs propres avec la vitesse du vent

2.3.3. Cas de l'aile d'avion

Pour des raisons de manoeuvrabilité de l'appareil, on s'arrange en général pour que le centre de torsion de la voilure soit positionné au foyer, c'est-à-dire au quart de corde. Cela nous conduit à $p = 0$, et permet de simplifier l'expression de la vitesse critique :

$$U_c^2 = \frac{-2J_O}{\rho c d C_z'} \left(-(\lambda_z + \lambda_\alpha) + \sqrt{4\lambda_\alpha \lambda_z \left(1 - \frac{md^2}{J_O}\right)} \right) \quad (2.16)$$

en supposant que le centre de gravité est placé derrière le foyer, i.e. $d < 0$ comme sur la *figure 2.1*. Dans ce cas la fréquence de flottement est donnée par la solution double de l'équation aux valeurs propres (2.12), soit

$$f_c^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_z / 1 - \frac{md^2}{J_O}}. \quad (2.17)$$

Si le foyer est en arrière du centre de gravité, il n'est pas possible de déclencher un flottement classique sur un profil d'aile. Mais cela implique de concevoir la voilure en plaçant le centre de gravité très en amont, avant le quart de corde.

2.3.4. Cas d'un tablier profilé

Dans le cas d'un tablier de pont profilé, les allures des dérivées de flottement diffèrent assez peu de ceux d'un profil d'aile et l'on peut raisonnablement utiliser les résultats précédents. Un tablier étant construit symétriquement, le centre de torsion et le centre de gravité sont alors confondus et situés au milieu, i.e. $d = 0$. La vitesse critique s'écrit alors

$$U_c^2 = \frac{-2J_O}{\rho c p C_z} (\lambda_\alpha - \lambda_z). \quad (2.18)$$

L'existence d'une solution physique impose des conditions sur le rapport des fréquences de torsion et de flexion en relation avec la position relative du foyer par rapport au centre de gravité (signe de p). En posant $r = \lambda_z / \lambda_\alpha$, la vitesse critique devient

$$U_c^2 = \frac{2J_O \lambda_\alpha}{\rho c^2 C_M} r (1 - r). \quad (2.19)$$

L'analyse de cette expression en fonction de r montre qu'il existe une vitesse critique dans deux cas :

- si $r < 1$ et $p < 0$, c'est-à-dire si la fréquence de flexion est plus petite que la fréquence de torsion et si le foyer est en avant du centre de gravité (c'est-à-dire $C_M' > 0$),
- si $r > 1$ et $p > 0$.

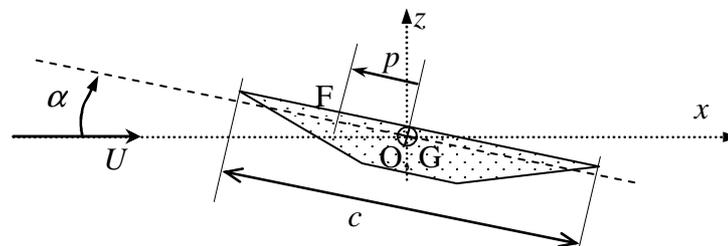


Figure 2.3. Tablier profilé en couplage flexion-torsion

En pratique le foyer d'un tablier profilé se situe généralement en avant du centre de gravité. On constate ainsi que le risque de flottement existe en présence d'une faible fréquence de flexion. Malheureusement l'expérience montre que cette condition est vérifiée dans la plupart des cas car la fréquence de flexion décroît naturellement lorsque la longueur d'un pont augmente.

Si par ailleurs les fréquences de flexion et de torsion sont identiques ($r = 1$), la vitesse critique est nulle. Ce cas de figure extrême est la justification d'une règle de conception bien connue qui consiste à décaler le plus possible les fréquences de flexion de celles de torsion.

Exemple : tablier du pont de Normandie

Le pont de Normandie possède un tablier très bien profilé. Ses caractéristiques approximatives sont :

$$B=21.2 \text{ m} ; m=9830 \text{ kg/m} ; J_0=378000 \text{ kg.m} ; f_z = 0.206 \text{ Hz} ; f_\alpha=0.632 \text{ Hz} ; C_z' = 4.58 ; C_M' = 1.12 .$$

On remarquera que la position du foyer se situe pratiquement au quart de la largeur B , confirmant ainsi son caractère profilé. L'application directe de la formule (2.19) donne $U_c=129 \text{ m/s}$, (465 km/h) soit une vitesse critique bien supérieure à la vitesse du vent que l'on peut rencontrer.

2.4. Les flottements à un degré de liberté

Les flottements à un degré de liberté, bien qu'apparemment plus simples que le flottement par couplage de mode, ont cependant des propriétés plus délicates à étudier car ils sont principalement présents sur des structures non profilées, donc aux propriétés aérodynamiques non linéaires.

2.4.1. La divergence en torsion

La divergence en torsion est le mécanisme le plus simple à appréhender. En prenant l'équation du mouvement de torsion pure du système (2.10) au paragraphe précédent, soit

$$\ddot{\alpha} + \lambda_\alpha \alpha = \frac{\rho c^2 U^2}{2J_0} C_M' \alpha , \tag{2.20}$$

il suffit de la réarranger pour faire apparaître la raideur aérodynamique ajoutée :

$$\ddot{\alpha} + \left(\lambda_\alpha - \frac{\rho c^2 U^2}{2J_0} C_M' \right) \alpha = 0 . \tag{2.21}$$

On constate qu'une instabilité par raideur négative est théoriquement possible dont la vitesse critique vaut

$$U_c^2 = \frac{2J_0 \lambda_\alpha}{\rho c^2 C_M} . \tag{2.22}$$

en admettant que la pente du coefficient de moment de tangage est positive. Si elle est négative, il ne peut y avoir de divergence en torsion. En pratique, cette possibilité théorique d'instabilité est très rare,

à cause de la valeur très élevée de la vitesse critique, généralement au-delà du domaine d'utilisation de la structure. Fort heureusement, car le mouvement engendré, comme son nom l'indique serait une divergence exponentielle, très rapide donc et destructrice.

Exemple : tablier du pont de Normandie

Pour continuer sur cet exemple, la vitesse critique de divergence en torsion donnée par (2.22) est alors de 141 m/s (506 km/h).

2.4.2. Le galop

Le galop est une instabilité sur un mouvement de translation des cylindres élancés. Le mouvement introduit des efforts de couplage de type amortissement ajouté.

On suppose donc que le cylindre présenté *figure 2.4* oscille en translation dans le plan (x, z) . Sa vitesse vibratoire est \mathbf{u} . On suppose ici que la fréquence réduite est faible, et que l'hypothèse quasi-statique s'applique. Dans le principe il n'est pas nécessaire de supposer des mouvements découplés sur les deux axes du plan (x, z) , mais cela permet de conserver un caractère général à la démarche. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} m \ddot{x} + 2m \omega_x \eta \dot{x} + m \omega_x^2 x = \frac{1}{2} \rho U_a^2 D C_x(\alpha_a) \\ m \ddot{z} + 2m \omega_z \eta \dot{z} + m \omega_z^2 z = \frac{1}{2} \rho U_a^2 D C_z(\alpha_a) \end{cases} \quad (2.23)$$

L'amortissement structural réduit est η . Les coefficients aérodynamiques statiques sont C_x et C_z et sont fonction de la direction apparente du vent α_a qui est réellement perçue par le cylindre lors des oscillations. Les coefficients aérodynamiques sont présumés définis dans le repère de la structure (x, z) . U_a est la vitesse apparente du vent perçue par le cylindre qui résulte de la combinaison de la vitesse du vent U et de la vitesse de la structure $\mathbf{u} = (\dot{x}, \dot{z})$ telle que $\mathbf{U}_a = \mathbf{U} - \mathbf{u}$.

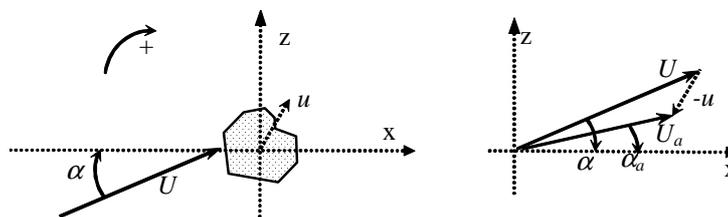


Figure 2.4. Cylindre oscillant en translation et triangle des vitesses correspondant

On linéarise les efforts aérodynamiques sous la forme

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2} \rho U^2 D P \dot{x} \\ F_z = \frac{1}{2} \rho U^2 D H_1 \dot{z} \end{cases} \quad (2.24)$$

où P et H_1 sont les dérivées de flottement d'amortissement pur en traînée et en portance respectivement. Ils sont obtenus par dérivation des efforts par rapport à la vitesse du mouvement de la structure et évalués pour une vitesse u nulle conformément à l'hypothèse quasi-statique. D'après la *figure 2.4* nous avons

$$U_a = \begin{Bmatrix} U \cos \alpha \\ U \sin \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}; \quad \alpha_a = \text{Arctg} \left[\frac{U \sin \alpha - \dot{z}}{U \cos \alpha - \dot{x}} \right]. \quad (2.25)$$

Après calcul on obtient

$$\begin{cases} P = \frac{1}{U} \left(-2 \cos \alpha C_x(\alpha) + \sin \alpha C_x'(\alpha) \right) \\ H_1 = \frac{1}{U} \left(-2 \sin \alpha C_z(\alpha) - \cos \alpha C_z'(\alpha) \right) \end{cases} \quad (2.26)$$

Or les amortissements aérodynamiques sont des amortissements ajoutés qui se retranchent à l'amortissement structural, d'où un risque d'instabilité. Lorsque l'angle d'incidence moyen α est nul, on obtient la formulation habituelle du phénomène de galop, avec

$$P = \frac{-2 C_{x_0}}{U}; \quad H_1 = \frac{-C_{z_0}'}{U}. \quad (2.27)$$

En remplaçant ces coefficients dans les équations du mouvement, soit

$$\begin{cases} m \ddot{x} + \left[2m \omega_x \eta + \rho U D C_{x_0} \right] \dot{x} + m \omega_x^2 x = 0 \\ m \ddot{z} + \left[2m \omega_z \eta + \frac{1}{2} \rho U D C_{z_0}' \right] \dot{z} + m \omega_z^2 z = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

on fait apparaître les amortissements résultants. Considérons maintenant chaque mouvement de manière indépendante.

Sur l'axe x , relatif à la traînée, le mouvement de balançoire (longitudinal, parallèle au vent) sera toujours amorti, car l'amortissement ajouté qui est proportionnel au coefficient de traînée est toujours positif. En fait le vent contribue même à mieux amortir ce mouvement.

Par contre, sur l'axe z de la portance, le mouvement de pilonnement (vertical, transverse au vent) peut devenir négatif au-delà d'une vitesse critique

$$U_c = \frac{-4m \omega_z \eta}{\rho D C_{z_0}}. \quad (2.29)$$

à condition que le gradient de portance soit négatif. Cette vitesse critique s'exprime aussi sous forme adimensionnelle

$$U_{rc} = \frac{U_c}{fD} = -\frac{2m\eta}{\rho D^2} \frac{4\pi}{C_{z_0}} = -S_c \frac{4\pi}{C_{z_0}} \quad (2.30)$$

où S_c est le **nombre de Scruton**, appelé parfois le paramètre de masse-amortissement. Ce nombre sans dimension est très largement utilisé dans les problèmes de couplage fluide-structure.

La condition de gradient de portance négatif s'écrit également à l'aide des coefficients aérodynamiques exprimés en axes vent (cf. § 1.2.2)

$$C_{z_0}' = C_D' + C_L' < 0. \quad (2.31)$$

Ce critère, traduisant la condition nécessaire pour qu'une instabilité de galop existe, est très connu sous le nom de **critère de Den Hartog**.

Cela nécessite que la courbe de portance soit décroissante en fonction de l'angle d'incidence. Le critère de Den Hartog s'applique donc aux structures non profilées qui possèdent une portance décroissante ou bien aux profils d'aile à grande incidence comme présenté *figure 2.5*. De fait, le phénomène de galop constitue physiquement une instabilité de flottement de décrochage sur un mouvement de translation. Il existe une instabilité similaire sur le mouvement de torsion.

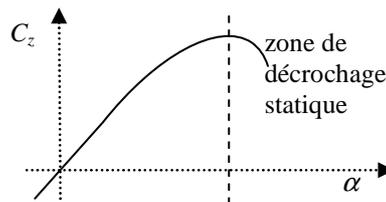


Figure 2.5. Evolution du coefficient de portance d'un profil d'aile

Exemple : passerelle piéton haubannée

Les passerelles pour piétons sont généralement des ouvrages légers de faible largeur. L'écoulement décollé englobe complètement la section de tablier et la rend sensible au galop. $B=4\text{ m}$; $m=1000\text{ kg/m}$; $J_O=500\text{ kg.m}$; $f_z=1.375\text{ Hz}$; $f_\alpha=5.26\text{ Hz}$; $C_{z_0}'=-2.37$; $C_M'=-0.7$, $\eta=1\%$.

Le nombre de Scruton vaut ainsi 1.04. La vitesse critique de galop calculée par (2.30) est 30 m/s (110 km/h). Dans ce cas un traitement est nécessaire, par exemple en augmentant l'amortissement structural.

2.4.3. Le flottement de décrochage en torsion

On considère maintenant une structure de type tablier de pont pouvant osciller en torsion seulement, et dont le phénomène de divergence en torsion est absent ou bien se produit pour une vitesse très élevée. En tenant compte maintenant des termes d'amortissement, l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\alpha} + 2\eta\omega_\alpha\dot{\alpha} + \lambda_\alpha\alpha = \frac{1}{2J_O}\rho c^2 U_a^2 C_M(\alpha_a), \quad (2.32)$$

Le moment de tangage dépend donc d'une vitesse apparente et de l'angle d'incidence apparent qui doivent être évalués au foyer aérodynamique de la section.

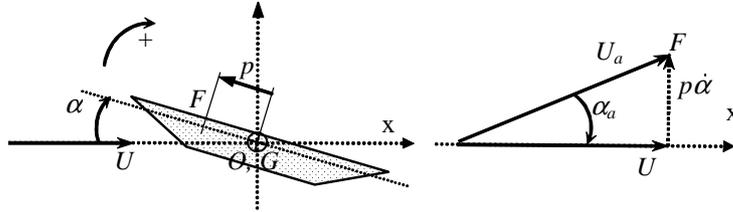


Figure 2.6. Section de tablier oscillant en torsion et triangle des vitesses correspondant

En suivant le triangle des vitesses *figure 2.6*, il vient

$$U_a^2 = U^2 + (p\dot{\alpha})^2; \quad \sin(\alpha_a) = \frac{p\dot{\alpha}}{U}. \quad (2.33)$$

On linéarise ensuite le moment de tangage sous la forme habituelle en fonction de l'angle d'incidence et de la vitesse angulaire, soit

$$\ddot{\alpha} + 2\eta\omega_\alpha\dot{\alpha} + \lambda_\alpha\alpha = \frac{\rho c^2 U^2}{2J_O} [A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha], \quad (2.34)$$

où les dérivées de flottement s'écrivent après calculs

$$A_2 = \frac{p}{U} C_M'; \quad A_3 = C_M'. \quad (2.35)$$

Comme pour le galop, une instabilité par amortissement ajouté peut exister, de vitesse critique

$$U_c = \frac{4J_O \omega_\alpha \eta}{\rho c^2 p C_M'}. \quad (2.36)$$

A noter que le foyer est supposé en avant du centre de torsion, ce qui est généralement le cas ($p < 0$). Cette instabilité est alors du même type que le galop, c'est-à-dire un flottement de décrochage, car pour exister il est nécessaire que le gradient de moment de tangage soit négatif. Ceci ne se produit a priori que sur des structures non profilées, dont certains tabliers de pont.

Exemple : passerelle piéton haubannée

De même que la passerelle précédente est sensible au galop, elle est instable aussi en torsion. Sa vitesse critique calculée par (2.36) vaut 42 m/s (150 km/h) ce qui est supérieure à la vitesse critique de galop.

2.5. Excitation par la turbulence

L'excitation des structures telles que les ponts par la turbulence du vent est généralement considérée découplée du mouvement. Cela n'est évidemment valable qu'en petite amplitude. Les variations des efforts ne proviennent donc que des fluctuations de la vitesse incidente, induisant une variation du module de la vitesse et un angle d'incidence apparent.

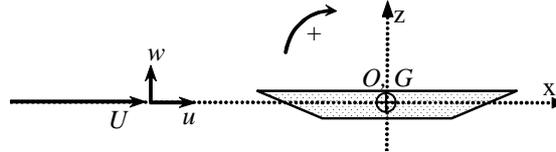


Figure 2.7. Section de tablier soumise à la turbulence

On considère donc une section soumise à une vitesse turbulente comme illustré *figure 2.7*. Les termes turbulents u et w dépendent naturellement du temps. La vitesse apparente et l'incidence apparente sont données par

$$U_a^2 = (U + u)^2 + w^2; \quad \sin \alpha_a = w/(U + u). \quad (2.37)$$

En admettant que la vitesse moyenne U est grande devant les termes turbulents, on linéarise, soit

$$U_a^2 \cong U^2 + 2U u; \quad \alpha_a \cong w/U. \quad (2.38)$$

Ces relations permettent donc d'écrire les efforts dus à la turbulence

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho B U^2 \left(2 \frac{u}{U} C_x + C_x' \frac{w}{U} \right) \\ F_z &= \frac{1}{2} \rho B U^2 \left(2 \frac{u}{U} C_z + C_z' \frac{w}{U} \right) \\ M_y &= \frac{1}{2} \rho B^2 U^2 \left(2 \frac{u}{U} C_M + C_M' \frac{w}{U} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il est très difficile d'utiliser ces relations car elles nécessitent de connaître les évolutions temporelles de u et w simultanément, ce qui est en pratique quasiment impossible. C'est pourquoi, on leur préfère généralement une formulation dans le domaine spectral, à l'aide des éléments définis au chapitre précédent (§ 1.4), soit

$$\begin{aligned} F_x(f) &= \frac{1}{2} \rho B U^2 \left(2 I_u \sqrt{S_u(f)} C_x + C_x' I_w \sqrt{S_w(f)} \right) \\ F_z(f) &= \frac{1}{2} \rho B U^2 \left(2 I_u \sqrt{S_u(f)} C_z + C_z' I_w \sqrt{S_w(f)} \right) \\ M_y(f) &= \frac{1}{2} \rho B^2 U^2 \left(2 I_u \sqrt{S_u(f)} C_M + C_M' I_w \sqrt{S_w(f)} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lorsque le problème traité est tridimensionnel, il convient en plus de tenir compte des dimensions spatiales des rafales de vent à l'aide des fonctions de cohérence adéquates (cf. § 1.4.2). Rappelons toutefois que cette approche est quasi-stationnaire, ce qui sous-entend que toute la largeur du tablier est soumise simultanément aux maxima de la vitesse turbulente.

Exemple : tablier du pont de Normandie

Calculons à l'aide de (2.40) la portance supplémentaire due à la turbulence qui s'applique à la fréquence de flexion de 0.206 Hz. On a le coefficient de portance $C_z = -0.35$ qui sera naturellement pris en valeur absolue dans la formule (2.40), s'agissant d'une force fluctuante. Les données d'un vent de mer présentées tableau 1.1 sont utilisées pour une vitesse moyenne extrême à la hauteur du tablier de 40 m/s. On constate lors de l'application numérique que le premier terme $2 I_u \sqrt{S_u(f)} C_z$ vaut 0.0063 est négligeable devant le second terme $I_w \sqrt{S_w(f)} C_z'$ qui vaut 0.060. L'effet de la turbulence longitudinale est effectivement généralement moindre que celui de la turbulence verticale (ou latérale si l'on a affaire à une structure verticale).

Tous calculs faits, la portance par mètre de longueur de tablier atteint 1220 N/m à la fréquence de flexion. Cette valeur peut paraître petite, mais elle n'est mécaniquement pondérée que par l'amortissement structural qui est généralement petit. Ainsi, en négligeant complètement les effets tridimensionnels du vent liés à sa corrélation spatiale et ceux liés à l'admittance (cf. chapitre 3, § 3.3.3) cette portance induit un déplacement vertical maximal du tablier de l'ordre de 3.70 m pour un amortissement structural de 1%. Fort heureusement les effets négligés de corrélation spatiale et d'admittance sont pondérateurs et rendent cette approche très conservatrice.

2.6. Excitation par détachement tourbillonnaire

L'excitation par détachement tourbillonnaire se distingue de celle de la turbulence par son caractère harmonique à la fréquence de détachement des tourbillons. Cette excitation peut poser des problèmes de dimensionnement lorsque cette fréquence coïncide avec une fréquence propre de la structure. Dans ce cas la résonance induit un phénomène de couplage qui est encore assez mal maîtrisé du point de vue modélisation prédictive.

2.6.1. Approche linéaire

On considère le cylindre oscillant en translation transverse au vent moyen U de la figure 2.8.

L'équation du mouvement s'écrit

$$m \ddot{z} + 2m\eta\omega \dot{z} + \omega^2 z = \frac{1}{2} \rho D U^2 C_z(t) \quad (2.41)$$

où la fluctuation du coefficient de portance est due au détachement des tourbillons. En première approximation on la considère sinusoïdale à la fréquence du détachement

$$C_z(t) = C_{z_{\max}} \cos(\omega_t t) \quad (2.42)$$

Lorsqu'il y a résonance, c'est-à-dire lorsque $\omega = \omega_t$, l'amplitude de vibration est maximale et

$$z(t) = \frac{\rho D U^2 C_{z_{\max}}}{2m\eta\omega^2} \sin(\omega t) \quad (2.43)$$

en admettant un amortissement structural faible ($\eta \ll 1$). Cette relation sous forme adimensionnelle devient

$$\frac{z(t)}{D} = \frac{C_{z_{\max}}}{4\pi^2 S_c St^2} \sin(\omega t) \quad (2.44)$$

en faisant apparaître le nombre de Scruton et le nombre de Strouhal (égal à la fréquence réduite pour la résonance). En fait, on trouve souvent dans la littérature spécialisée un nombre sans dimension que l'on peut interpréter comme le paramètre caractérisant la réponse (linéaire) du cylindre, le **nombre de Skop-Griffin** qui représente le dénominateur du second membre de (2.44), soit

$$S_G = 4\pi^2 S_c St^2. \quad (2.45)$$

Ce nombre étant fixé, la réponse du cylindre à la résonance ne semble donc dépendre que de l'amplitude de la portance fluctuante $C_{z_{\max}}$. Estimé sur un cylindre circulaire immobile, cette portance est de l'ordre de 0.35 à 0.50.



Figure 2.8. Cylindre excité par détachement tourbillonnaire.

2.6.2. Limite de l'approche linéaire

Malheureusement, l'expérience montre que cette portance fluctuante est modifiée avec le mouvement du cylindre et dépend de l'amplitude. En fait lorsque le cylindre oscille à la résonance, la portance est amplifiée par rapport à celle que l'on mesure pour un cylindre fixe. Cette amplification peut atteindre 2.5 pour des amplitudes de l'ordre du diamètre. Ce mécanisme s'explique partiellement par une extension de la longueur de corrélation du détachement tourbillonnaire sur l'axe du cylindre lorsque ce dernier oscille à une amplitude suffisante. De plus, à très grande amplitude de vibration, on constate ensuite une réduction de la portance, ce qui conduit à un cycle limite d'oscillation dont l'amplitude est effectivement fixée par cette amplification non linéaire de portance.

D'autre part il existe un phénomène d'hystérésis autour de la résonance que l'on appelle l'accrochage. Ce phénomène se caractérise par une extension de la résonance sur une certaine gamme de vitesse de l'écoulement. Lorsque la résonance a lieu, le fait de modifier la vitesse du vent, en l'augmentant ou en la diminuant, n'annule pas immédiatement la résonance entre le lâcher de tourbillons et le mouvement.

Plus précisément, sur un diagramme vitesse-fréquence, *figure 2.9*, la fréquence du détachement de tourbillons devrait constituer une droite croissante puisque le nombre de Strouhal est constant. De même la fréquence de la structure est une droite horizontale car elle ne dépend pas de la vitesse du vent. La vitesse de résonance est obtenue au croisement de ces deux droites. Or en pratique lorsque la vitesse du vent se rapproche de la vitesse de résonance, la fréquence du détachement effectue un saut pour se fixer à la fréquence de la structure oscillante. C'est l'accrochage ou « lock-in ». Ce dernier n'est pas symétrique selon que l'on approche la résonance à vitesse croissante ou décroissante.

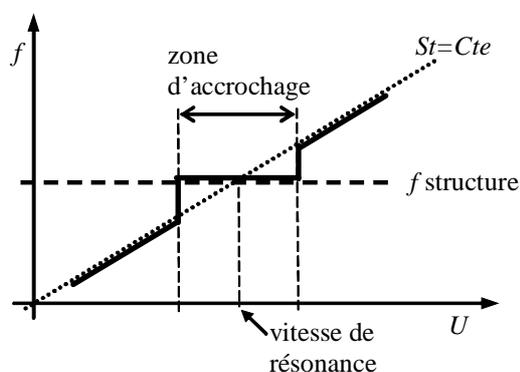


Figure 2.9. Accrochage entre la fréquence du détachement tourbillonnaire et celle de la structure.

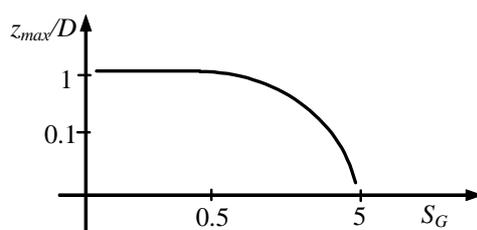


Figure 2.10. Amplitude de la réponse d'un cylindre circulaire en fonction de S_G .

Enfin, troisième et dernier mécanisme limitant l'approche linéaire, l'expérience montre que la réponse du cylindre dépend également du nombre de Skop-Griffin comme présenté *figure 2.10* pour le cylindre circulaire. Si le paramètre de réponse est trop important, l'excitation par détachement tourbillonnaire est pratiquement nulle. Or dans le cas des effets du vent, cette limite implique que seules les structures très légères peuvent être concernées par ce type d'excitation.

Par exemple, cherchons la masse volumique d'un cylindre circulaire ayant un paramètre de réponse $S_{G_{\max}}$ égal à 5, valeur au-delà de laquelle aucune excitation par détachement tourbillonnaire n'existe.

Par définition on a ainsi

$$\rho_s = \rho \frac{S_{G_{\max}}}{2\pi^3 \eta St^2}. \quad (2.46)$$

En appliquant cette relation à un cylindre circulaire ($St=0.2$) en air ($\rho=1.2$) et choisissant un amortissement réduit standard de 1%, on obtient une masse volumique de 240 kg/m^3 , soit une valeur près de 12 fois inférieure à celle de l'aluminium. De ce fait, il est évident que le détachement tourbillonnaire alterné ne pourra concerner que des structures particulières, par exemple des cheminées élancées ou bien des haubans de pont qui ont un amortissement structural très faible (0.1 % avant traitement n'est pas exceptionnel).

L'ensemble de ces phénomènes a conduit les chercheurs à s'intéresser aux modélisations non linéaires, seules capable de reproduire au moins qualitativement ces mécanismes. Leurs capacités prédictives sont encore limitées et le lecteur est invité à se référer à la littérature spécialisée.

Il existe une relation empirique simple due à Griffin (1982) qui s'écrit

$$\frac{z_{\max}}{D} = \frac{1.29}{[1 + 0.43 S_G]^{3.35}} \quad (2.47)$$

valable pour un cylindre circulaire rigide à la résonance.

Exemple : hauban de pont

Les haubans sont des câbles circulaires d'un diamètre de l'ordre de 20 cm. Leur amortissement structural peut être très faible, de l'ordre de 0.1 %. En prenant un hauban de masse linéaire 50 kg/m, on obtient un nombre de Scruton de 2. Le nombre de Strouhal valant 0.2 pour un cylindre circulaire, alors le nombre de Skop-Griffin atteint 3.3. En appliquant directement la relation empirique (2.47) on calcule une amplitude de 0.07 D soit 1.4 cm à la résonance. On constate effectivement que le détachement tourbillonnaire alterné reste peu gênant pour ce type de structure.

3. Aéroélasticité

On s'intéresse dans ce chapitre à des structures élancées bidimensionnelles dont les fréquences d'oscillation sont trop élevées pour que l'hypothèse quasi-statique puisse s'appliquer sans erreur importante. On reste néanmoins dans le domaine des fréquences réduites faibles, où c'est toujours l'écoulement qui pilote les vibrations de la structure.

3.1. Limite de l'hypothèse quasi-statique

L'hypothèse quasi-statique employée au chapitre précédent suppose que le mouvement de la structure est très lent devant le déplacement des particules fluides. Elle constitue une limite asymptotique pour laquelle on assimile une fréquence réduite faible à une fréquence réduite égale à zéro. Cela permet effectivement de considérer comme valables les coefficients aérodynamiques évalués sur une structure immobile.

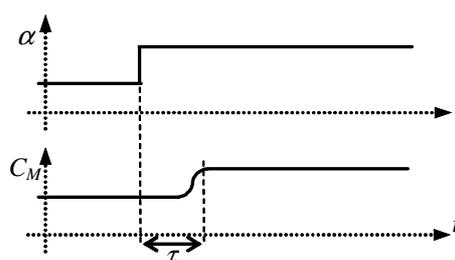


Figure 3.1. Mise en évidence du déphasage entre effort et mouvement.

Une conséquence très importante de cette hypothèse est que l'écoulement est censé s'adapter instantanément au mouvement de la structure. Autrement dit on néglige le retard de phase qui existe entre le mouvement et l'effort aérodynamique. Schématiquement on peut imaginer par exemple un profil d'aile auquel on applique subitement un échelon d'angle d'incidence, *figure 3.1*. Cela induit en

parallèle une variation du moment de tangage mais l'expérience montre que celui-ci ne sera établi qu'après un certain délai τ alors que sous l'hypothèse quasi-statique ce délai est nul.

En extrapolant ce mécanisme à un mouvement sinusoïdal d'oscillation, le délai τ correspondrait à un déphasage ϕ entre l'effort et le mouvement soit

$$\alpha = \tilde{\alpha} \cos \omega t; \quad C_M = \tilde{C}_M \cos(\omega t - \phi) \text{ avec } \phi = \omega \tau > 0. \quad (3.1)$$

Or le travail du moment de tangage sur un cycle d'oscillation est

$$W = \int_{\text{cycle}} C_M d\alpha = \int_0^T C_M \dot{\alpha} dt = -\pi \tilde{\alpha} \tilde{C}_M \sin \phi \quad (3.2)$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période du mouvement. Pour des valeurs de τ inférieures à une demi-période, le travail W est négatif, indiquant un échange d'énergie du fluide vers la structure, c'est-à-dire un mouvement instable. Si $\tau > T/2$ le travail est positif, le mouvement est stable.

On constate donc que la connaissance du temps d'établissement de l'écoulement, donc de l'effort aérodynamique instationnaire est très importante pour la stabilité aéroélastique. L'hypothèse quasi-statique ne permet pas a priori d'évaluer correctement les échanges d'énergie car on assimile le fait que $\tau/T \rightarrow 0$ à $\tau/T = 0$, induisant ainsi une erreur sur le travail W . Dans ce chapitre, on va s'affranchir de cette simplification, d'abord pour un profil d'aile puis pour une structure non profilée.

3.2. Cas du profil d'aile mince

3.2.1. Couplage flexion-torsion

On reprends ici le cas du profil d'aile mince 2D en couplage flexion-torsion du paragraphe 2.3 tel que présenté *figure 2.1*. Cette configuration a été étudiée initialement par Wagner (1925), Theodorsen (1935), Küssner (1936) et Sears (1941). On utilisera principalement les résultats fournis par l'approche de Theodorsen qui est la plus connue.

On s'intéresse de nouveau aux dérivées de flottement telles que

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 \left(H_1^\# \frac{\dot{z}}{U} + H_2^\# \frac{c \dot{\alpha}}{U} + H_3^\# \alpha + H_4^\# \frac{z}{c} \right) \\ M_O = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 \left(A_1^\# \frac{\dot{z}}{U} + A_2^\# \frac{c \dot{\alpha}}{U} + A_3^\# \alpha + A_4^\# \frac{z}{c} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

en supposant toujours des amplitude de mouvement petites et des incidences faibles. Dans ce cas, on peut admettre que la vitesse de l'air autour du profil se linéarise sous la forme

$$u = \bar{U} + u'; \quad v = v' \quad (3.4)$$

où les termes u' et v' sont des perturbations dépendant du temps. Cette vitesse doit naturellement respecter la condition de Kutta au bord de fuite. En considérant un fluide **non visqueux**, **incompressible** et **irrotationnel**, on peut utiliser la notion de potentiel complexe et la transformation

conforme de Joukowski lors de la résolution du problème. Cette théorie est souvent appelée la théorie du profil d'aile instationnaire (UAT, Unsteady Airfoil Theory). Après calculs, il est possible de trouver des expressions analytiques des dérivées de flottement lorsque le mouvement du profil d'aile est harmonique de la forme

$$z = z_0 e^{i\alpha t}; \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}. \quad (3.5)$$

Pour cela on introduit la **fonction de Theodorsen** $C(K)$ dépendant de la pulsation réduite $K = 2\pi f c/U$. Cette fonction appelée également la fonction de circulation de Theodorsen s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel modifiées K_0 et K_1 d'ordre 0 et 1 respectivement, soit

$$C(K) = F(K) + iG(K) = \frac{K_1(iK)}{K_0(iK) + K_1(iK)}. \quad (3.6)$$

En pratique il est plus commode d'exprimer les parties réelle et imaginaire à l'aide de fonctions de Bessel de première et seconde espèce J et Y , c'est-à-dire

$$F = \frac{J_1(Y_0 + J_1) - Y_1(J_0 - Y_1)}{(Y_0 + J_1)^2 + (J_0 - Y_1)^2}; \quad G = \frac{-J_1(J_0 - Y_1) - Y_1(Y_0 + J_1)}{(Y_0 + J_1)^2 + (J_0 - Y_1)^2}. \quad (3.7)$$

Ces fonctions sont présentées *figure 3.2* en fonction de K . Lorsque K tend vers 0 (quasi-statique), F tend vers 1 et G tend vers 0. A l'inverse, pour K grand, F tend vers $1/2$ et G lentement vers 0.

Il existe des approximations de la fonction de Theodorsen dont notamment celle due à Jones (1945)

$$C(K) = F(K) + iG(K) = 1 - \frac{0.165}{1 - 0.0455 i/K} - \frac{0.335}{1 - 0.3 i/K} \quad (3.8)$$

qui engendre cependant une erreur non négligeable sur la partie imaginaire G .

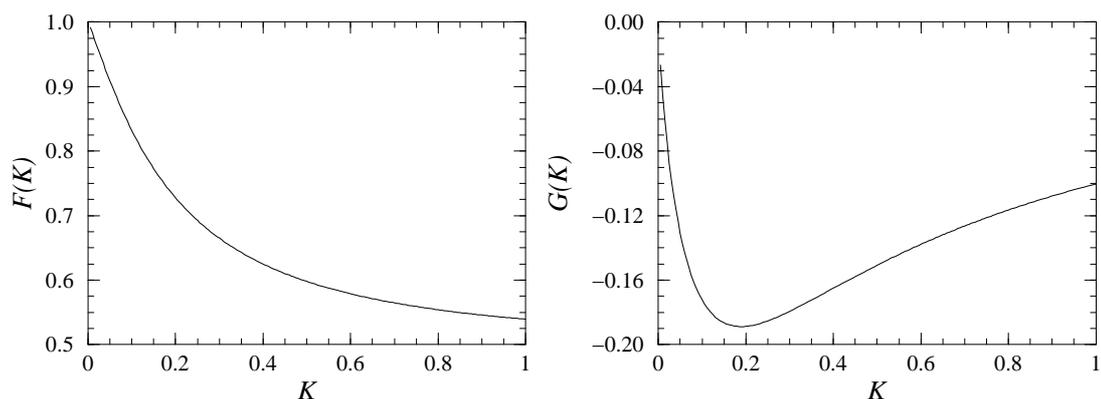


Figure 3.2. Partie réelle et imaginaire de la fonction de Theodorsen.

Après calculs, les dérivées de flottements pour le mouvement de translation verticale sont données par

$$\begin{cases} H_1^\# = -2\pi F; & H_2^\# = 2\pi \left[\frac{1}{4} + \frac{G}{K} + \left(\frac{1}{4} - a \right) F \right] \\ H_3^\# = 2\pi \left[F - \left(\frac{1}{4} - a \right) KG + K^2 \frac{a}{4} \right]; & H_4^\# = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{4G}{K} \right] K^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

et pour le mouvement de torsion

$$\begin{cases} A_1^\# = -2\pi F \left(\frac{1}{4} + a \right); & A_2^\# = -\frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{1}{4} - a \right) - \frac{4G}{K} \left(\frac{1}{4} + a \right) + 4F \left(a^2 - \frac{1}{16} \right) \right] \\ A_3^\# = \frac{\pi}{2} \left[4F \left(\frac{1}{4} + a \right) + 4KG \left(a^2 - \frac{1}{16} \right) + \left(a^2 + \frac{1}{32} \right) K^2 \right]; & A_4^\# = -\frac{\pi}{2} \left[a + \frac{4G}{K} \left(\frac{1}{4} + a \right) \right] K^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans ces expressions, a est la distance adimensionnée par rapport à la corde entre le milieu du profil et le centre de torsion O , cf. *figure 3.3*. Lorsque le centre de torsion est positionné au foyer F , c'est-à-dire au quart de corde, alors $a = -1/4$, s'il est au milieu du profil, $a=0$.

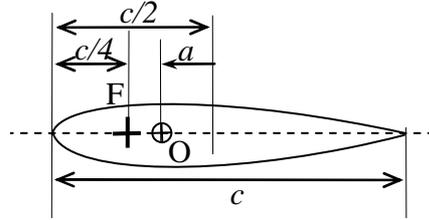


Figure 3.3. Position du foyer par rapport au centre de torsion sur la corde du profil

En rappelant que par définition $C_M' = C_z' \left(\frac{1}{4} + a \right)$ avec $C_z' = 2\pi$, on peut arranger les relations précédentes pour donner

$$\begin{cases} H_1^\# = -C_z' F; & H_2^\# = C_z' \left[\left(\frac{1}{4} - a \right) F + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \\ H_3^\# = C_z' \left[F - KG \left(\frac{1}{4} - a \right) \right] + C_z' K^2 \frac{a}{4}; & H_4^\# = C_z' KG + C_z' \frac{K^2}{4} \\ A_1^\# = -C_M' F; & A_2^\# = C_M' \left[\left(\frac{1}{4} - a \right) F + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \left(a - \frac{1}{4} \right) \\ A_3^\# = C_M' \left[F - KG \left(\frac{1}{4} - a \right) \right] + C_z' K^2 \frac{a^2}{4} + C_z' \frac{K^2}{128} \\ A_4^\# = -C_M' KG - C_z' a \frac{K^2}{4} \end{cases} \quad (3.11)$$

Les termes les plus importants sont dus à la circulation autour du profil satisfaisant la condition de Kutta. Ils sont adossés à la fonction de Theodorsen. La force de portance associée s'applique au $1/4$ de corde (au foyer) où C_M' s'annule. Les autres termes sont des effets de masse ajoutée induisant

- une portance s'appliquant à la $\frac{1}{2}$ corde, ayant donc un bras de levier égal à a ;
- un effet centrifuge dû à la torsion, produisant une portance au $\frac{3}{4}$ de corde, soit d'un bras de levier $a - \frac{1}{4}$;
- un couple pur.

Rappelons que cette théorie potentielle instationnaire résulte d'une linéarisation sur des mouvements de faible amplitude dans un écoulement non visqueux. L'estimation de la vitesse critique de flottement nécessite l'emploi d'une méthode numérique itérative dans laquelle on augmente pas à pas la vitesse du vent, afin de calculer les dérivées de flottement correspondantes, en regardant pour chaque vitesse la stabilité ou non du système.

3.2.2. Comparaison avec la théorie quasi-statique

Dans le chapitre précédent, nous avons supposé une très faible fréquence réduite, ce qui nous avait permis d'obtenir des expressions pour les dérivées de flottement que nous pouvons comparer maintenant avec celles tenant compte des effets instationnaires.

Pour cela, on doit remarquer que les dérivées de flottement peuvent s'exprimer généralement comme des polynômes du second degré au maximum en K . En quasi-statique, seule la constante de ce polynôme peut être estimée car il s'agit de sa limite asymptotique pour $K \rightarrow 0$. Sachant que $F \rightarrow 1$ cela donne :

$$\begin{aligned}
 \lim_{K \rightarrow 0} H_1^\# &= -C_z' ; & \lim_{K \rightarrow 0} H_2^\# &= C_z' \left[-a + \frac{G}{K} \right] ; & \lim_{K \rightarrow 0} H_3^\# &= C_z' ; & \lim_{K \rightarrow 0} H_4^\# &= 0 \\
 \lim_{K \rightarrow 0} A_1^\# &= -C_M' ; & \lim_{K \rightarrow 0} A_2^\# &= C_M' \left[\frac{1}{4} - a + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \left(a - \frac{1}{4} \right) ; & & & & \\
 \lim_{K \rightarrow 0} A_3^\# &= C_M' ; & \lim_{K \rightarrow 0} A_4^\# &= 0 & & &
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dans un premier temps on se concentre sur les termes de raideurs. Pour la translation, on constate que les expressions de $H_4^\#$ et $A_4^\#$ n'ont pas de constante, ce qui indique que ces termes sont uniquement dus aux effets instationnaires, non modélisés en quasi-statique. Pour le tangage les termes $H_3^\#$ et $A_3^\#$ sont très importants dans le problème du flottement couplé et comportent chacun des termes constants. En fait on constate que l'équivalence avec la théorie statique est globalement obtenue lorsque $K \rightarrow 0$, sauf pour les termes d'amortissement en tangage $H_2^\#$ et $A_2^\#$.

Pour mieux appréhender ces différences, on compare les dérivées de flottement lorsque $a = 0$, c'est-à-dire lorsque le centre de torsion est placé au milieu du profil. Cette configuration n'est pas réaliste pour un profil d'aile mais représente la majorité des tabliers de ponts. Les dérivées de flottement se simplifient en

$$\begin{cases} H_1^\# = -C_z' F; & H_2^\# = C_z' \left[\frac{F}{4} + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \\ H_3^\# = C_z' \left[F - \frac{KG}{4} \right]; & H_4^\# = C_z' KG + C_z' \frac{K^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1^\# = -C_M' F; & A_2^\# = C_M' \left[\frac{F}{4} + \frac{G}{K} \right] - \frac{C_z'}{16} \\ A_3^\# = C_M' \left[F - \frac{KG}{4} \right] + C_z' \frac{K^2}{128}; & A_4^\# = -C_M' KG \end{cases} \quad (3.13)$$

La comparaison avec la théorie quasi-statique (QST) est présentée *figure 3.4* en fonction de K .

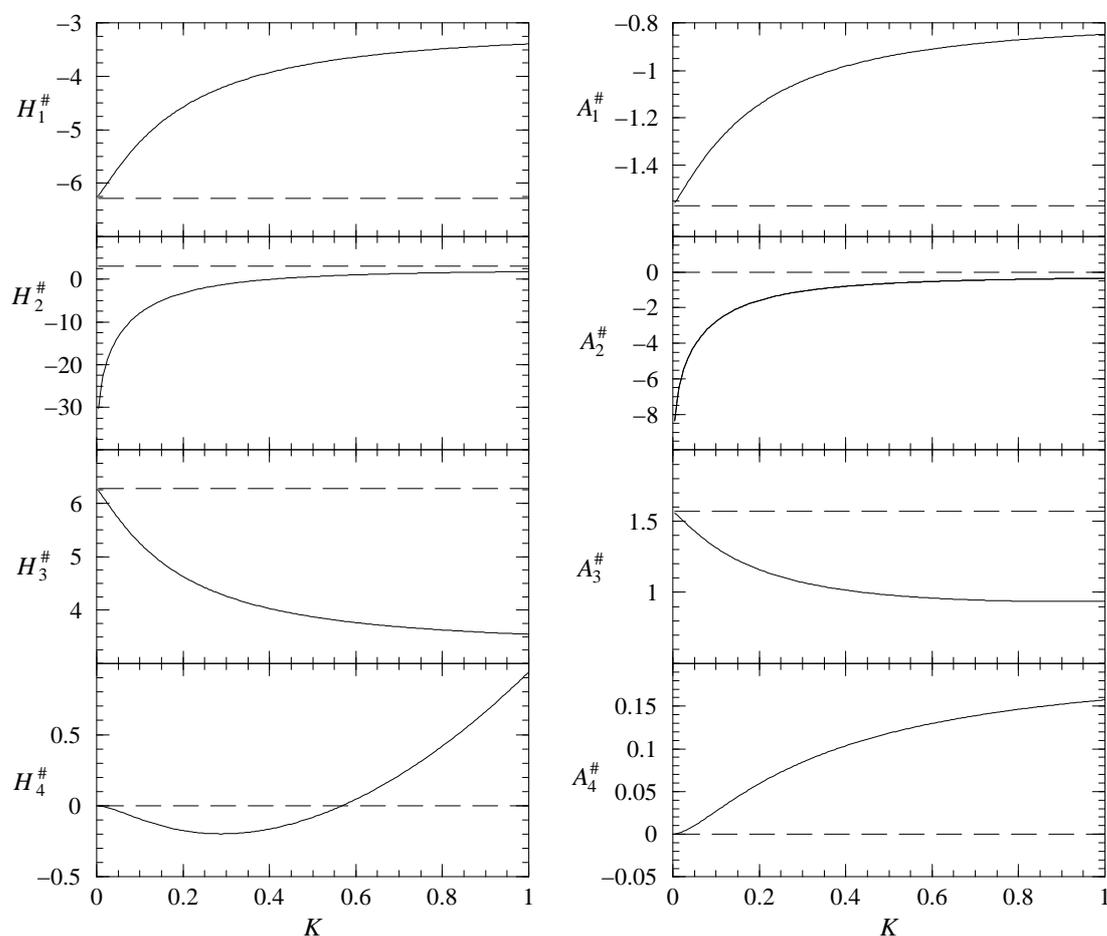


Figure 3.4. Dérivées de flottement pour $a=0$ en UAT (—) et QST (---).

L'analyse des composantes d'amortissement en tangage montre que les fortes différences aux faibles fréquences réduites sont liées directement au terme en G/K intervenant dans leur définition. En effet, cette fonction tend très lentement vers $-\infty$ pour $K \rightarrow 0$ ce qui constitue une singularité lorsque K est pris rigoureusement nul. En fait l'estimation de ces deux coefficients d'amortissement en torsion pure et couplée constitue un problème récurrent dans les problèmes aéroélastiques.

En pratique la théorie quasi-statique néglige ces effets ce qui la rend inefficace lorsque la configuration du problème rend ces coefficients primordiaux.

3.2.3. Le décrochage dynamique

La notion de décrochage dynamique d'un profil d'aile est une bonne introduction à l'étude des flottements des corps non profilés. En effet, lorsque l'angle d'incidence moyen du profil est situé dans la zone de décrochage statique, il se produit un décrochage dynamique. Celui-ci diffère de la simple oscillation en torsion à faible incidence du paragraphe précédent par le fait que la vitesse du vent autour du profil ne reste pas parallèle à la vitesse amont. En d'autres termes, l'hypothèse de base servant au développement de la théorie potentielle instationnaire n'est pas respectée (linéarisation de la vitesse, équation (3.4)).

Globalement le décrochage dynamique est un mécanisme physique comportant une hystérésis dans l'établissement d'un cycle du mouvement. On peut l'illustrer sur un diagramme portance-angle d'incidence comme la *figure 3.5*. Lorsque le cycle d'oscillation en incidence d'amplitude $\Delta\alpha$ empiète sur la zone de décrochage statique, le comportement non linéaire intervient et se traduit par :

- une augmentation de la portance maximale par rapport à la courbe statique, comme si le décrochage se produisait pour une incidence plus grande,
- suivi en retour d'un recollement plus tardif, avec une situation de décrochage qui perdure aussi plus longtemps.

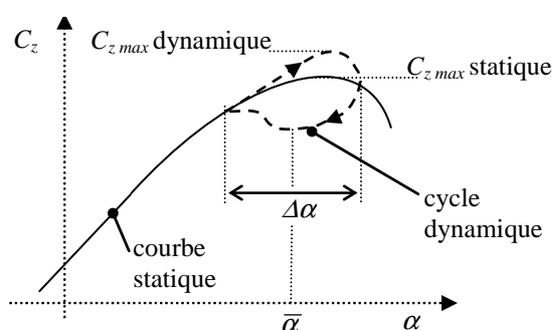


Figure 3.5. Cycle de décrochage dynamique d'un profil d'aile

Ces deux phénomènes combinés conduisent au cycle d'hystérésis du décrochage dynamique : celui-ci est parcouru dans le sens horaire et son aire, qui représente le travail de la force de portance, est négative : elle indique donc un transfert d'énergie du fluide vers la structure. Cette énergie doit être dissipée par la structure, généralement par amortissement structural afin d'éviter une instabilité.

Evidemment en pratique la forme du cycle dépend de la fréquence réduite, de l'amplitude $\Delta\alpha$, et de la valeur de $\bar{\alpha}$. Le même type de comportement est observé pour le moment de tangage, avec éventuellement des cycles comportant plusieurs boucles.

La modélisation mécanique de ce phénomène reste assez complexe, plus ou moins empirique et fait encore l'objet de recherches. Le lecteur est invité à consulter la littérature spécialisée. Le décrochage dynamique d'un profil d'aile concerne des domaines importants comme la conception des pâles d'hélicoptères ou plus récemment les grandes pâles d'éoliennes réglées au décrochage.

3.2.4. Effet de la turbulence

L'effet de la turbulence sur un profil d'aile a été étudié initialement par Sears (1941). L'idée repose sur le fait que la turbulence peut se modéliser comme un train d'onde qui se propage le long du profil à la vitesse moyenne de l'écoulement. On suppose donc une vitesse turbulente verticale de la forme

$$w(x, t) = \tilde{w} \exp[i\omega(t - x/\bar{U})] \quad (3.14)$$

où la pulsation $\omega = 2\pi\bar{U}/\ell$ est basée sur la longueur d'onde ℓ des perturbations turbulentes. Dans ce cas, Sears a montré que la portance résultante sur un profil à incidence petite était donnée par

$$C_z(K) = 2\pi \frac{\tilde{w}}{U} S(K) \exp[i\omega t] \quad (3.15)$$

où la **fonction de Sears** $S(K)$ est donnée à l'aide de la fonction de Theodorsen par

$$S(K) = [J_0(K) - iJ_1(K)]C(K) + iJ_1(K). \quad (3.16)$$

Cette portance résultant de la circulation agit au $1/4$ de corde (au foyer). Elle n'induit donc pas de moment de tangage au foyer de l'aile. En pratique on utilise plutôt le module de la fonction de Sears pour évaluer l'amplitude de la force induite par la turbulence, soit

$$|S(K)|^2 = (J_0^2 + J_1^2)(F^2 + G^2) + J_1^2 + 2J_0J_1G - 2J_1^2F. \quad (3.17)$$

qui est présenté *figure 3.6*. Il en existe une approximation relativement précise due à Fung (1955)

$$|S(K)|^2 = \frac{0.1811 + K}{0.1811 + 1.5689K + 2\pi K^2}. \quad (3.18)$$

Revenons sur l'expression (3.15) de la portance induite par la turbulence. Dans cette expression la fonction de Sears traduit le fait que la turbulence est convectée longitudinalement et que le profil n'est pas soumis aux maxima de la vitesse w simultanément. La fonction de Sears agit donc comme une fonction de pondération, son maximum étant égal à 1 pour une fréquence réduite nulle, c'est-à-dire pour la limite quasi-statique. Pour des fréquences élevées, les échelles de turbulence correspondantes sont plus faibles que la corde du profil, d'où une décroissance rapide en fonction de K . Ce type de fonction de pondération s'appelle une **admittance aérodynamique**. Elle est intrinsèquement liée à la composante de la force et à la structure considérée et il convient d'obtenir des admittances pour les autres composantes des efforts, notamment la traînée, ce qu'évidemment la théorie potentielle instationnaire ne permet pas d'obtenir.

On peut faire la comparaison avec la portance obtenue en quasi-statique au chapitre précédent, équation (2.40). Cette dernière se réécrit en négligeant la composante de turbulence longitudinale

$$C_z(f) = C_z' \frac{\tilde{w}}{U} \sqrt{S_w(f)}. \quad (3.19)$$

Cette expression est bien cohérente avec celle obtenue maintenant en se rappelant que le terme en exponentielle de (3.15) contient la pulsation ω basée sur la longueur d'onde de la turbulence. Ce terme joue ici le rôle d'un modèle du spectre de w , simplifié, mais permettant le déroulement du calcul analytique.

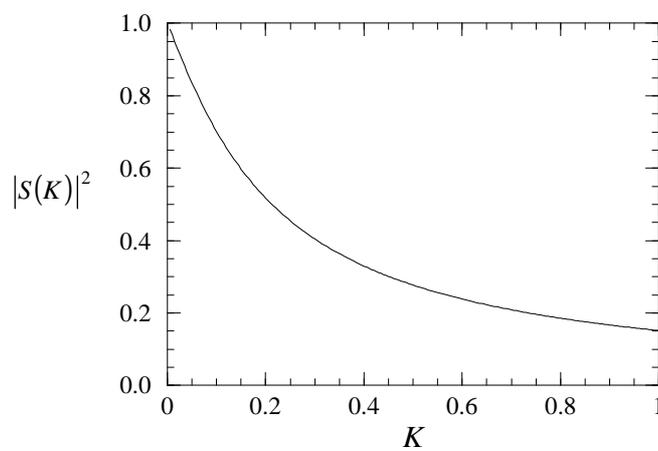


Figure 3.6. Module de la fonction de Sears

3.3. Cas des corps non profilés

Pour les corps non profilés la vitesse de l'écoulement autour de l'obstacle ne suit pas les hypothèses (3.4) prises précédemment à cause des zones décrochées. On ne peut donc pas appliquer la théorie potentielle précédente.

Par ailleurs, l'hypothèse quasi-statique employée au chapitre précédent est encore moins valide. En effet la notion globale de faible fréquence réduite, faisant référence à la vitesse à l'amont, doit être remise en cause car la vitesse moyenne dans la zone décollée au droit d'une telle structure est nettement plus faible. Localement la fréquence réduite augmente et invalide l'hypothèse quasi-statique.

3.3.1. Les dérivées de flottement

Pour pallier à l'absence d'une théorie générale, il s'est donc avéré nécessaire d'utiliser des coefficients issus de mesures en soufflerie sur maquette mobile. Différentes formulations existent de part le monde mais la plus utilisée est certainement celle de Scanlan (1971) dans le domaine fréquentiel. Celle-ci est formellement donnée par

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho B U^2 \left(K H_1^* \frac{\dot{z}}{U} + K H_2^* \frac{B \dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{z}{B} \right) \\ M_O = \frac{1}{2} \rho B^2 U^2 \left(K A_1^* \frac{\dot{z}}{U} + K A_2^* \frac{B \dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{z}{B} \right) \end{cases} \quad (3.20)$$

où les dérivées de flottement sont des fonctions de la fréquence réduite K . La largeur B de la structure, par exemple la largeur d'un tablier, prend ici la place de la corde c du profil d'aile. Par comparaison avec le modèle utilisé aux paragraphes précédents, cf. équation (3.3), on constate que le modèle de Scanlan reste proche, introduisant sans conséquence pratique un rapport K sur les coefficients d'amortissement et K^2 sur les coefficients de raideur. Dans ce document on conserve la notation des dérivées de flottement introduite par le modèle (3.3).

Ces coefficients doivent être évalués en soufflerie, sur maquette mobile, en fonction de la fréquence réduite K . En pratique les phénomènes rencontrés diffèrent selon que la structure étudiée est à grand ou petit allongement.

Pour les petits allongements, c'est le cas des pylônes, le phénomène instable quand il existe est généralement un galop, lié à un amortissement aérodynamique négatif c'est-à-dire lorsque $H_1^\# > 0$. Habituellement l'approche quasi-statique présentée au § 2.4.2 reste assez fiable pour déterminer la vitesse critique, la mesure sur maquette mobile ne faisant qu'établir une correction.

Dans le cas des tabliers, d'allongement grand, l'écoulement a la possibilité de recoller ou non sur l'arrière de l'obstacle, ce qui conduit à diverses possibilités d'instabilités. Si le tablier est bien profilé, le flottement classique par couplage de mode constitue généralement le risque principal. Ce mécanisme est piloté principalement par les termes $H_3^\#$ et $A_3^\#$ dont l'évolution en fonction de la fréquence réduite est généralement similaire à celle d'un profil d'aile. On peut raisonnablement déterminer la vitesse critique telle que calculée au chapitre 2 (§ 2.3.4) en remplaçant les dérivées de flottement quasi-statique par celles évaluées en soufflerie. En conservant les notations, cela donne

$$U_c^2 = \frac{2 J_O \lambda_\alpha}{\rho B^2 A_3^\#} (1-r). \quad (3.21)$$

Rappelons toutefois que $A_3^\#$ dépend de la vitesse du vent et qu'une méthode numérique itérative est nécessaire pour résoudre cette équation.

Lorsque le tablier n'est pas profilé, les risques d'instabilité proviennent généralement des amortissements $H_1^\#$ et surtout $A_2^\#$, conduisant à des flottements à un degré de liberté par amortissement négatif.

3.3.2. Problème de l'amortissement en torsion

Le cas de l'instabilité par amortissement en torsion constitue un phénomène remarquable pour les tabliers de pont. Scanlan (1971) a montré qu'il est à l'origine de la destruction du pont de Tacoma en

décembre 1940 aux USA. Dans ce type de problème l'approche quasi-statique n'est pas valide pour les fréquences réduites rencontrées en pratique.

La *figure 3.7* compare l'allure du coefficient d'amortissement en torsion du profil d'aile et celle d'un tablier non profilé comme celui du pont de Tacoma. Ce dernier devient positif pour des fréquences faibles indiquant bien une instabilité par amortissement en torsion. Ce phénomène est tout à fait impossible à prédire via la théorie quasi-statique ou la théorie du profil d'aile instationnaire, le caractère non profilé étant ici dominant.

Le passage par zéro de ce coefficient donne la valeur approximative de la vitesse d'instabilité (en négligeant l'effet de l'amortissement structural). Cette vitesse peut s'avérer très petite, bien en deçà de celle du dimensionnement statique. A titre indicatif, la destruction du pont de Tacoma s'est produite pour une vitesse de vent moyen de l'ordre de 68 km/h.

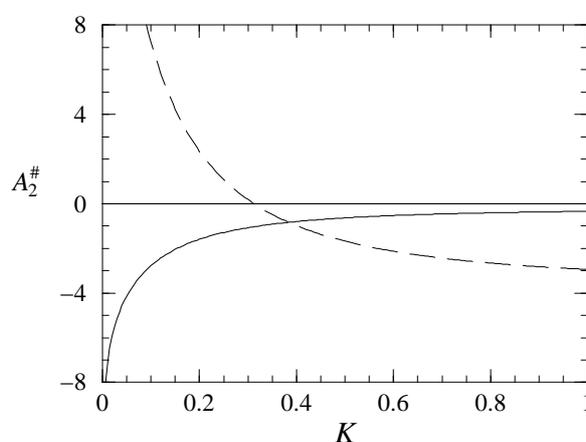


Figure 3.7. Coefficient $A_2^\#$ pour un profil d'aile (trait continu) et un tablier non profilé (tirets).

3.3.3. Admittances

Pour les mêmes raisons que précédemment, les effets de la turbulence sur un corps non profilés sont très différents de ceux d'un profil d'aile. Il n'est donc pas possible d'employer la fonction de Sears. Comme pour les dérivées de flottement, l'évaluation rigoureuse doit se faire en soufflerie avec les difficultés que cela comporte. Les études ont montré que la pondération due à l'admittance était nettement moindre pour un corps non profilé que pour une aile, d'où le danger d'extrapoler arbitrairement la fonction de Sears à un tablier de pont.

Pour la composante de portance, il existe une expression empirique due à Davenport (1962)

$$|S(K)|^2 = 2 \left(\frac{7K}{2\pi} - 1 + \exp \left[-\frac{7K}{2\pi} \right] \right) / \left(\frac{7K}{2\pi} \right)^2. \quad (3.22)$$

qui est comparée avec la fonction de Sears *figure 3.8*. On constate effectivement que l'admittance d'un tablier reste nettement supérieure sur une gamme étendue de fréquence réduite. C'est pourquoi l'approche quasi-statique qui maximise l'admittance est souvent utilisée par sécurité.

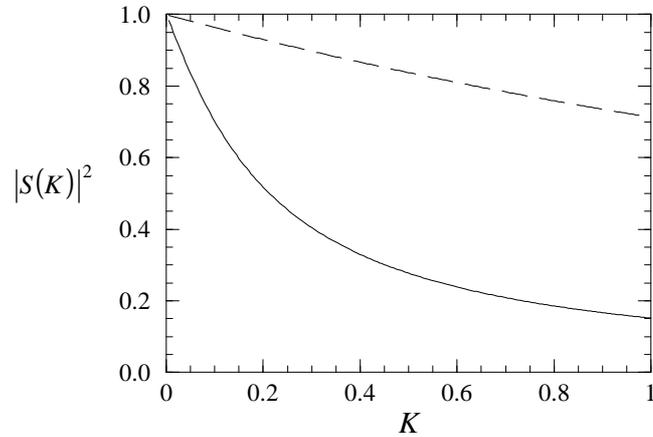


Figure 3.8. Admittance en portance, fonction de Sears (trait continu), relation de Davenport (tirets).

Une autre expression due à Irwin est donnée par

$$|S(K)|^2 = \frac{4}{\eta_1 \eta_2} (\eta_1 - 1 - \exp(-\eta_1)) (\eta_2 - 1 - \exp(-\eta_2))$$

$$\eta_1 = 0.95 \frac{B}{L_u^x} \sqrt{1 + 70.78 \left(\frac{KL_u^x}{2\pi B} \right)^2} ; \quad \eta_2 = 0.475 \frac{H}{L_u^z} \sqrt{1 + 70.78 \left(\frac{KL_u^z}{2\pi B} \right)^2} . \quad (3.23)$$

Elle est très employée car elle tient compte des rapports entre les dimensions longitudinale B et verticale H du tablier avec les échelles de turbulence correspondantes. Rappelons que l'admittance utilisée jusqu'à présent concerne l'effet de la turbulence verticale sur la portance. On la note dans la suite $S_z^w(K)$.

En l'absence d'une expression similaire pour le moment de tangage, on pourrait penser raisonnablement que $S_M^w(K) = S_z^w(K)$ pour un tablier de pont, dans la mesure où le moment en torsion est principalement dû à la manière dont se répartit la portance de part et d'autre du milieu du tablier. En fait cette hypothèse ne va pas dans le sens de la sécurité car des études ont montré que l'admittance en torsion pouvait être supérieure à 1. Dans un cas extrême, il est possible en effet qu'un train d'onde turbulent ait une contribution de signe différent sur chaque moitié du tablier, ce qui exciterait la torsion. Les études montrent que cet effet proche d'une résonance se produit essentiellement sur des tabliers non profilés à basse fréquence. Cette caractéristique est propre à l'obstacle et il n'existe à ce jour pas d'expression analytique.

Dans le cas général d'évaluation des efforts dus à la turbulence sur un tablier de pont, on doit également disposer de l'effet de la turbulence longitudinale sur les composantes de portance et de

tangage. Scanlan (1993) a suggéré de les estimer à l'aide des dérivées de flottement, estimant que les effets de la turbulence longitudinale s'apparentaient à des mouvements de torsion de la structure. Aussi, il obtient

$$\begin{aligned} |S_z^u(K)|^2 &= \left((H_2^\#)^2 + (H_3^\#)^2 / K^2 \right) / (C_z')^2 \\ |S_M^u(K)|^2 &= \left((A_2^\#)^2 + (A_3^\#)^2 / K^2 \right) / (C_M')^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En conséquence, les efforts dus à la turbulence peuvent donc s'exprimer dans le domaine fréquentiel par

$$\begin{aligned} F_z(K) &= \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left(2I_u \sqrt{S_u(f)} S_z^u(K) C_z + I_w \sqrt{S_w(f)} S_z^w(K) C_z' \right) \\ M_y(K) &= \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left(2I_u \sqrt{S_u(f)} S_M^u(K) C_M + I_w \sqrt{S_w(f)} S_M^w(K) C_M' \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il ne s'agit en fait que des expressions quasi-statiques établies au chapitre précédent et pondérées par les admittances correspondantes. En général on a besoin du module des forces dus à la turbulence, et ce sont donc les modules des admittances qui sont utilisées.

4. Phénomènes particuliers

On présente dans ce chapitre quelques phénomènes de vibration induite par le vent survenant sur les câbles circulaires comme les haubans.

4.1. La crise de traînée

L'instabilité par crise de traînée est un mécanisme assez rare de vibration dans la direction du vent. Elle est liée à une gamme de nombre de Reynolds assez restreinte, autour de 10^5 . Autour de cette valeur, la couche limite autour du cylindre passe d'un régime laminaire à un régime turbulent. Comme mentionné au chapitre 1, § 1.2.5., la conséquence principale est une baisse assez forte de la traînée pour une petite augmentation du nombre de Reynolds. Cette sensibilité du coefficient de traînée peut entraîner une instabilité par amortissement négatif.

Le mouvement d'un cylindre sur l'axe x est décrit par

$$m \ddot{x} + 2m \omega_x \eta \dot{x} + m\omega_x^2 x = \frac{1}{2} \rho U_a^2 D C_x(Re), \quad (4.1)$$

U_a est la vitesse apparente du vent perçue par le cylindre et le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds apparent. On a donc

$$U_a = U - \dot{x}; \quad Re = Re_0 \left(1 - \frac{\dot{x}}{U} \right). \quad (4.2)$$

Après linéarisation de la force de traînée, l'équation du mouvement devient

$$m \ddot{x} + 2m \omega_x \eta \dot{x} + m\omega_x^2 x = \frac{1}{2} \rho D U \left(-Re_0 \frac{\partial C_x}{\partial Re} - 2C_x \right) \dot{x} \quad (4.3)$$

où l'on constate qu'il existe une instabilité lorsque l'amortissement total devient négatif, i.e.

$$2m \omega_x \eta + \rho D U \left(\frac{Re_0}{2} \frac{\partial C_x}{\partial Re} + C_x \right) < 0. \quad (4.4)$$

Ceci peut se produire lorsque

$$\frac{\partial C_x}{\partial Re} < \frac{2C_x}{Re_0} . \quad (4.5)$$

En pratique cette condition ne peut être satisfaite qu'autour de la valeur critique du nombre de Reynolds pour le cylindre considéré, de l'ordre de 10^5 à $2 \cdot 10^5$ pour un cylindre lisse. Cette instabilité est donc restreinte à une gamme étroite de vitesse d'où sa rareté.

En outre l'amortissement ajouté doit être suffisant pour annuler l'amortissement structural, ce qui fait que cette possibilité théorique reste anecdotique pour les écoulements en air.

4.2. Le galop de sillage

Le galop de sillage d'un corps flexible est une instabilité causée par la perturbation de l'écoulement due à la présence d'un autre corps placé en amont. Il s'agit d'un phénomène d'interférence aérodynamique qui est obligatoirement lié à la présence de plusieurs structures. En fonction de la position relative des deux corps, il peut apparaître des excitations aéroélastiques conduisant à des mouvements de grande amplitude. Dans le cas de cylindres circulaires, le détachement tourbillonnaire peut se coupler au phénomène du galop de sillage.

Ces vibrations ont fait l'objet de nombreuses études dans les domaines les plus divers, de la tenue des tubes d'échangeurs, aux structures off-shore, aux groupes de cheminées et naturellement aux câbles de haubans ou de lignes électriques sur lesquelles il a été initialement observé.

Le galop de sillage concerne les cas où les écartements des cylindres sont grands, de 3 à 5 diamètres. Un modèle quasi-statique a été proposé par Simpson (1971). On peut l'écrire sous la forme d'un oscillateur à 2 degrés de liberté,

$$\begin{cases} m \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x + k_{xy} y = \frac{1}{2} \rho U^2 D (A_1 x + A_2 y + A_3 \dot{x} + A_4 \dot{y}) \\ m \ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y + k_{yx} x = \frac{1}{2} \rho U^2 D (B_1 x + B_2 y + B_3 \dot{x} + B_4 \dot{y}) \end{cases} . \quad (4.6)$$

où les coefficients A_i et B_i (pour $i=1$ à 4), analogues aux dérivées de flottement, sont tirés de coefficients quasi-statiques d'effort et de vitesses moyennes dans le sillage :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{\partial C_x}{\partial x} \right|_0 ; A_2 = \left. \frac{\partial C_x}{\partial y} \right|_0 ; A_3 = \left. \frac{-2C_x}{U^s} \right|_0 ; A_4 = \left. \frac{C_y}{U^s} \right|_0 \\ B_1 &= \left. \frac{\partial C_y}{\partial x} \right|_0 ; B_2 = \left. \frac{\partial C_y}{\partial y} \right|_0 ; B_3 = \left. \frac{-2C_y}{U^s} \right|_0 ; B_4 = \left. \frac{-C_x}{U^s} \right|_0 \end{aligned} . \quad (4.7)$$

avec U et U^s la vitesse du vent avant le premier obstacle et la vitesse moyenne après le premier obstacle respectivement.

Ce modèle est quasi-statique et linéaire. Il peut donc seulement donner des informations sur le risque d'instabilité et ne peut prédire le comportement instable, en particulier le cycle limite. Son domaine de validité est confiné à des écartements de l'ordre de 3 à 5 diamètres et pour des cylindres non alignés.

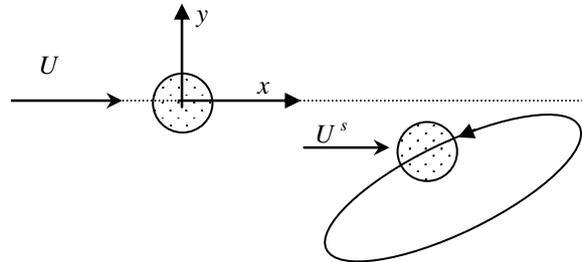


Figure 4.1. Mouvement du cylindre aval dû au galop de sillage

En outre, il est nécessaire de connaître le profil de vitesse derrière le premier cylindre. Dans le cas de cylindres circulaires, Blevins (1990) a proposé un modèle empirique ayant la forme d'une gaussienne et issu d'expériences. Il permet de calculer la perte de vitesse U_d dans le sillage à l'aide des relations

$$\frac{U_d}{U} = \frac{U - U^s}{U} = 1.2 \sqrt{\frac{D C_{xM}}{x + 6D}} e^{-\frac{0.69 y^2}{b^2}} \quad (4.8)$$

avec $b = 0.23 \sqrt{D C_{xM} (x + 6D)}$

où C_{xM} est le coefficient de traînée d'un cylindre circulaire isolé, de l'ordre de 1 à 1,2 ; x et y sont les coordonnées du second cylindre rapportées à l'axe du premier. La fermeture du modèle de Simpson ne nécessite alors que les coefficients d'efforts des cylindres et leurs dérivées.

Toutefois le caractère quasi-statique du modèle de Simpson contribue à limiter son domaine de validité. Lorsque les corps sont plus rapprochés et bien alignés l'un derrière l'autre, l'hypothèse quasi-statique doit être remise en cause car elle peut conduire à prédire la stabilité, en contradiction avec les observations expérimentales. Dans ce cas en effet, le second cylindre est plongé dans le sillage du premier et la vitesse U^s qu'il subit réellement est beaucoup plus faible, ce qui conduit à une vitesse réduite effective d'autant plus petite.

4.3. L'excitation conjointe vent-pluie

L'excitation conjointe sous l'action du vent et de la pluie concerne les câbles inclinés comme les haubans lorsqu'ils sont munis d'une gaine extérieure de protection rendant leur surface lisse. Ce phénomène est apparu récemment et a été observé initialement au Japon. Les câbles concernés ont un diamètre de 15 à 20 cm. Les vitesses de vent sont faibles, entre 5 et 15 m/s, pour des nombres de Reynolds autour de 10^5 . La particularité de ce phénomène est qu'il est du type « gamme de vitesse restreinte », ce qui signifie qu'il ne se produit que dans une gamme bornée de vitesses de vent.

Son origine fait encore l'objet de discussion parmi les chercheurs. Il est vraisemblable que cette instabilité ait des causes multiples. La diversité des configurations rencontrées en pratique (angle d'inclinaison, vitesse et direction du vent) provoque des interprétations très différentes de la part des spécialistes. On distingue grossièrement quatre tendances :

- Le galop sec : certains chercheurs, constatant qu'un cylindre incliné présente une section transversale au vent de forme elliptique, considèrent que cette forme est de nature à induire un galop, classique sur un plan phénoménologique, mais dans un référentiel géométrique tridimensionnel plus complexe. La présence de pluie n'est pas requise par cette interprétation.
- Le détachement tourbillonnaire tridimensionnel : l'écoulement sur le câble incliné se décompose en un écoulement axial et un écoulement transversal, produisant chacun leur échappement tourbillonnaire. Les deux types de détachement peuvent se coupler et conduire à une instabilité. Cette interprétation ne fait cependant pas l'unanimité parmi les spécialistes.
- Le galop mouillé : certains chercheurs ont remarqué que la présence de la pluie contribuait à former des filets d'eau s'écoulant le long de l'axe du hauban. Ces filets formés autour des points de séparation constituent une protubérance locale qui suffit à modifier globalement l'effort transversal de la section. Une instabilité de galop classique est alors possible. Des essais de soufflerie sur une configuration équivalente statique (cf. *figure 4.2*) ont montré que cette interprétation est plausible.
- Le couplage vent-pluie : cette interprétation s'appuie sur celle du galop mouillé pour laquelle on admet en plus que les filets d'eau sont soumis à un mouvement d'oscillation couplé avec la vibration du hauban. L'analyse mécanique montre que le mouvement d'un filet d'eau contribue effectivement à favoriser ou atténuer la vibration du câble en fonction notamment des différentes phases des oscillations.

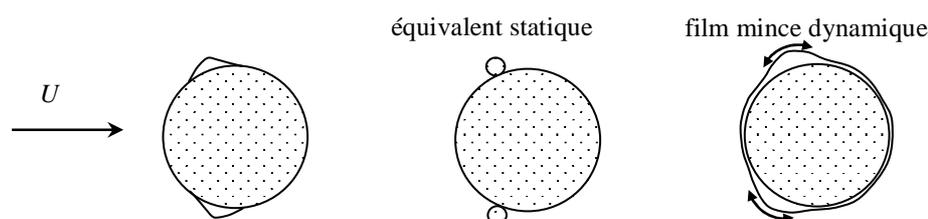


Figure 4.2. Différents scénarios de formation de filets d'eau sur un cylindre.

Les études les plus récentes montrent que la notion de filet d'eau est incomplète dans certains cas et que le hauban est en réalité mouillé sur toute sa circonférence par un film mince. Les filets s'apparentent alors à des surépaisseurs de ce film, *figure 4.2* qui peuvent osciller avec le mouvement du câble. L'aspect « gamme de vitesse restreinte » pourrait être dû au fait qu'à vitesse du vent élevée, ce dernier chasserait le film de la surface du cylindre.

Bibliographie

Mécanique des fluides et aérodynamique

- COMOLET R. Mécanique expérimentale des fluides ; Tome II. Masson, Paris, 1994
- HOERNER S.F. Résistance à l'avancement dans les fluides. Gauthiers-Villard, Paris, 1965.
- KERMODE A. C. Mécanique du vol. Modulo éditeur, Québec, 1982
- RYHMING I. L. Dynamique des fluides. Presses Polytechniques et Univ. Romandes, 1985

Vibrations

- GÉRADIN M. & RIXEN D. Théorie des vibrations. Masson, Paris, 1993
- DEN HARTOG J.P. Mechanical Vibrations. Dover, New York, 1985

Vibrations sous écoulement

- BLEVINS R.D. Flow-Induced Vibration. Van Nostrand Reinhold, New-York, 1990
- DE LANGRE E. Fluides et Solides. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- GIBERT R. J. Vibrations des structures. Interactions avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires. Collection de la DER d'EDF, Eyrolles, Paris, 1988
- NAUDASCHER E. & ROCKWELL D. Flow-Induced Vibrations. Balkema, Rotterdam, 1994.

Aéroélasticité et effets du vent

- AFGC (Association Française de Génie Civil) Comportement au vent des ponts. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002
- BISPLINGHOFF R.L. & ASHLEY H. Principles of Aeroelasticity. Dover, New York, 1975
- CECM (Convention Européenne de la Construction Métallique) Recommandations pour le calcul des effets du vent sur les constructions. *Construction Métallique*, Vol. 1, Mars 1989
- DOWELL E. H., CURTISS H. C. Jr., SCANLAN R. H. & SISTO F. A modern course in aeroelasticity. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1989
- FUNG Y.C. An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. Dover, New York, 1993
- SIMIU E. & SCANLAN R.H. Wind Effects on Structures. 3rd edition. Wiley & Sons, New York, 1996

Annexe 1 : Rappel sur l'oscillateur à un degré de liberté

L'équation d'un système à 1 degré de liberté s'écrit

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = F(x, \dot{x}). \quad (\text{A.1})$$

où m est la masse, c l'amortissement, k la raideur et F la force extérieure d'excitation supposée couplée en position et en vitesse.

Dans un premier temps on considère le système sans excitation extérieure. L'amortissement critique est celui pour lequel la solution $x(t)$ passe d'une sinusoïde décroissante à une exponentielle décroissante. Cet amortissement critique vaut $c_c = 2\sqrt{km}$.

L'amortissement d'une structure est généralement donné sous la forme d'un amortissement réduit qui est le rapport de l'amortissement réel avec l'amortissement critique, soit

$$\eta = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (\text{A.2})$$

Cet amortissement réduit souvent exprimé en pourcentage est généralement de l'ordre de quelques pourcents, voire quelques dixièmes de pourcents pour des haubans.

L'amortissement étant petit, la fréquence propre f du système est donnée par

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ avec } \omega^2 = \lambda = \frac{k}{m} \quad (\text{A.3})$$

où ω est la pulsation propre et λ la valeur propre. L'équation du mouvement peut se récrire alors sous la forme

$$m\ddot{x} + 2\eta\omega m\dot{x} + m\omega^2(x - x_0) = F(x, \dot{x}). \quad (\text{A.4})$$

Lorsqu'on linéarise la force extérieure d'excitation autour d'une position d'équilibre fixe x_0 , c'est à dire

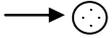
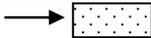
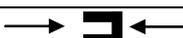
$$F(x, \dot{x}) = F_0 + \frac{\partial F_0}{\partial x}x + \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}\dot{x}. \quad (\text{A.5})$$

et que l'on remplace dans l'équation du mouvement, alors on obtient

$$m\ddot{x} + \left(2\eta\omega m - \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \left(m\omega^2 - \frac{\partial F_0}{\partial x}\right)x = 0. \quad (\text{A.6})$$

Le terme $-\frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}$ s'appelle l'amortissement ajouté, le terme $-\frac{\partial F_0}{\partial x}$ la raideur ajoutée. Des instabilités peuvent naître lorsque l'un ou l'autre de ces termes est négatif.

Annexe 2 : Nombres de Strouhal de sections usuelles

Section et direction du vent		St
	circulaire $Re < 10^5$	0.19 - 0.20
	circulaire $Re > 2-3 \cdot 10^6$	0.3
	carré	0.13
	rectangle 2:1	0.09
	rectangle 5:1	0.1
	plaque	0.16
	triangle	0.17
	H carré	0.120
	H rectangle 5:1	0.108
	U carré droit	0.126
	U carré couché	0.125
	section en I	0.145
	T droit	0.16
	T couché	0.145
	cornière	0.144
	cornière à 45°	0.147

Annexe 3 : Dérivées des efforts de quelques sections usuelles

Section et direction du vent		C_z' sans turbulence	C_z' turbulence 10%
	demi cercle	0.1	0.
	demi cercle	0.5	-2.9
	carré	-3.0	-3.5
	rectangle 2:1	-2.8	2.0
	rectangle 4:1	10	-
	plaque	6.3	6.3
	rectangle 1:2	0.5	-0.2

Section et direction du vent		C_M' par rapport au centre
	carré	-0.18
	rectangle 2:1	-0.64
	rectangle 4:1	-18
	rectangle 5:1	-26